Föreläsning 13: Oändlig summering – en återblick

Johan Thim (johan.thim@liu.se)

24 mars 2022

1 Generaliserade integraler

Påminn er om följande definition. Om f är kontinuerlig på $]a, b[$ så definierar vi den *generaliserade* integralen enligt

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{s\to a^+}\int_s^c f(x)\,dx + \lim_{t\to b^-}\int_c^t f(x)\,dx, \text{ där } a < c < b,$$

om båda gränsvärdena existerar ändligt (oberoende av varandra). I fallet då båda gränsvärdena existerar kallar vi integralen för **konvergent**, annars **divergent**.
Om $\displaystyle\int_a^b |f(x)|\,dx < \infty$ kallar vi $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ för **absolutkonvergent**. Notera att en absolutkonvergent integral *alltid* är konvergent och att

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

För att avgöra konvergens använder vi ofta jämförelsesatser.

1.1 Jämförelsesatser

Sats. Om $0 \le f(x) \le g(x)$ för $a < x < b$ så gäller $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$.

(i) $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$ konvergent $\Rightarrow \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ konvergent.

(ii) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ divergent $\Rightarrow \displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$ divergent.

Sats. Låt f och g vara icke-negativa kontinuerliga funktioner sådana att:

(i) $\int_a^b f(x)\,dx$ och $\int_a^b g(x)\,dx$ är generaliserade **endast** i $x = b$;

(ii) $0 < \lim_{x\to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} < \infty$.

Då gäller att

$$\int_a^b f(x)\,dx \text{ är konvergent} \quad \Leftrightarrow \quad \int_a^b g(x)\,dx \text{ är konvergent.}$$

Generalisering i $x = a$ istället fungerar analogt, men se till att endast en punkt är generaliserad i taget. Dela upp integralen annars. För att använda dessa satser är det användbart att ha något enkelt att jämföra med.

Vanliga jämförelsefunktioner

(i) $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx < \infty$ om och endast om $\alpha < 1$;

(ii) $\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx < \infty$ om och endast om $\alpha > 1$.

Givetvis går det bra att jämföra med något mer komplicerat, även om analysen av $\int g(x)\,dx$ då blir mer komplicerad.

Exempel

Konvergerar integralen $\int_0^\infty \frac{\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\arctan x}{x\sqrt{\ln(1+x)}}\,dx$? Motivera noggrant.

Lösning. Eftersom integralen är generaliserad både i 0 och ∞ så delar vi upp i två delar:

$$\int_0^1 \frac{\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\arctan x}{x\sqrt{\ln(1+x)}}\,dx + \int_1^\infty \frac{\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\arctan x}{x\sqrt{\ln(1+x)}}\,dx.$$

Vi börjar med att undersöka integralen på $[0,1]$. För $x \in]0,1]$ gäller att

$$\left|\frac{\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\arctan x}{x\sqrt{\ln(1+x)}}\right| \le \frac{1}{\sqrt{x}}\frac{\arctan x}{x}\frac{1}{\sqrt{x^{-1}\ln(1+x)}}.$$

Nu vet vi att $x^{-1}\arctan x \to 1$ och $x^{-1}\ln(1+x) \to 1$ då $x \to 0$, så

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\arctan x}{x}\frac{1}{\sqrt{x^{-1}\ln(1+x)}} = 1.$$

Låt därför $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ och $f(x) = g(x)\dfrac{\arctan x}{x}\dfrac{1}{\sqrt{x^{-1}\ln(1+x)}}$ för $x > 0$. Då är $f, g \geq 0$ för $x > 0$ och både f och g är kontinuerliga för $x > 0$. Vidare visade vi ovan att

$$\frac{f(x)}{g(x)} \to 1 \in]0, \infty[\text{ då } x \to 0^+,$$

så enligt jämförelsesatsen på gränsvärdesform följer det att

$$\int_0^1 \frac{\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\arctan x}{x\sqrt{\ln(1+x)}}\,dx$$

kommer vara absolutkonvergent eftersom vi vet att $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx < \infty$.

Vi undersöker nu integralen på $[1, \infty[$. Vi skriver

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\arctan x}{x\sqrt{\ln(1+x)}} = \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)\right)\arctan x}{x\sqrt{\ln(1+x)}} \\ &= \frac{1}{x\sqrt{x}\sqrt{\ln(1+x)}}\left(1 + O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)\right)\arctan x \end{aligned}$$

så vi låter $g(x) = \dfrac{1}{x^{3/2}\sqrt{\ln(1+x)}}$ för $x > 0$. Då gäller att

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \left(1 + O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)\right)\arctan x \to \frac{\pi}{2}, \text{ då } x \to \infty.$$

Eftersom f och g är kontinuerliga och icke-negativa på $]1, \infty[$ samt att gränsvärdet mot ∞ för f/g är $\dfrac{\pi}{2} \in]0, \infty[$ så följer det från jämförelsesatsen på gränsvärdesform att $\displaystyle\int_1^\infty f(x)\,dx$ är konvergent om och endast om $\displaystyle\int_1^\infty g(x)\,dx$ är konvergent. Vi undersöker denna integral:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^{3/2}\sqrt{\ln(1+x)}}\,dx \leq \frac{1}{\sqrt{\ln 2}}\int_1^\infty \frac{1}{x^{3/2}}\,dx$$

eftersom $\ln(1+x) \geq \ln 2$ för $x \geq 1$. Den sista integralen är känd som konvergent ($\alpha = 3/2$ är större än 1).

Svar. Konvergent!

2 Numeriska Serier

Om a_k, $k = 0, 1, 2, \ldots$ är en talföljd definierar vi **serien** s enligt

$$s = \sum_{k=0}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} a_k$$

i de fall då detta gränsvärde existerar. Vi kallar $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ för **delsummor** av $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$. Analogt med integraler (många resultat har en motsvarighet men inte alla så var försiktig) kallar vi en serie för **absolutkonvergent** om $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ är konvergent.

Ett mycket användbart resultat är divergenstestet. Märk väl att det *endast* är en implikation. Det finns gått om fall där termerna går mot noll men serien fortfarande är divergent (tex $a_k = 1/k$).

Divergenstestet

Sats. Om $\lim_{k\to\infty} a_k \neq 0$ så är $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ divergent.

Vanliga serier

(i) Den geometriska serien $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \dfrac{1}{1-q}$ om och endast om $|q| < 1$. Annars divergent.

(ii) $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^\alpha} < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \alpha > 1.$

Sats. Om $0 \leq a_k \leq b_k$ för alla k så är $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \leq \sum_{k=0}^{\infty} b_k$. Speciellt gäller att

(i) $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergent $\quad \Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent,

(ii) $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ divergent $\quad \Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} b_k$ divergent.

Cauchys integralkriterium

Sats. Om $f(x) \geq 0$ är en avtagande funktion för $x \geq 1$ så gäller att

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k) < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \int_1^{\infty} f(x)\,dx < \infty.$$

Exempel

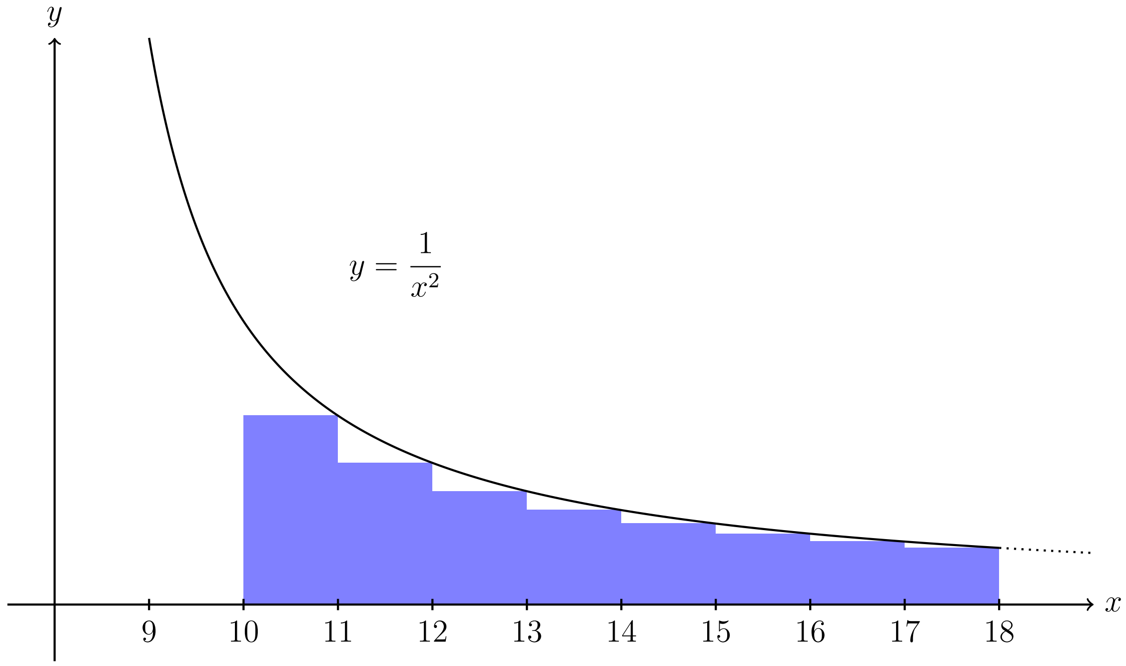
Visa att $\displaystyle\sum_{k=11}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \frac{1}{10}$.

Lösning. Eftersom funktionen $f(x) = 1/x^2$ är positiv och strängt avtagande för $x \geq 1$, så kommer

$$\sum_{k=11}^{n} \frac{1}{k^2} < \int_{10}^{n} \frac{1}{x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_{10}^{n} = \frac{1}{10} - \frac{1}{n} \leq \frac{1}{10}$$

för alla $n > 10$. Således kommer delsummorna i den positiva serien att vara uppåt begränsade, så serien är konvergent och dess värde är begränsat av

$$\sum_{k=11}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \frac{1}{10}.$$



Sats. Om $a_k \geq 0$ och $b_k \geq 0$ samt

$$0 < \lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} < \infty$$

så gäller att

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} b_k < \infty.$$

Rot- och kvotkriteriet

Sats. Om $Q = \lim_{k\to\infty} |a_k|^{1/k}$ eller $Q = \lim_{k\to\infty} |a_{k+1}/a_k|$ existerar så är $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolutkonvergent om $Q < 1$ och divergent om $Q > 1$.

Leibniz sats

Sats. Om $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ är en serie sådana att

(i) serien är alternerande så att $a_{k+1} = -a_k$ för alla k som det summeras över,

(ii) seriens termer går mot noll: $a_k \to 0$,

(iii) absolutbeloppet av seriens termer avtar monotont: $|a_k| \geq |a_{k+1}| \geq |a_{k+2}| \geq \cdots$,

så är serien konvergent. En serie som uppfyller dessa krav uppfyller även att

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \right| \leq |a_{n+1}|.$$

3 Potensserier

Dessa definieras som

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots$$

för de x där detta uttryck har mening (dvs serien konvergerar).

Varje potensserie $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ har en maximal *konvergensradie* R så att serien är absolutkonvergent då $|x| < R$ och divergent då $|x| > R$. Vidare gäller att f kan deriveras kontinuerligt oändligt många gånger på $]-R, R[$ och att

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k-1} \qquad \text{samt} \qquad \int_0^x f(t)\,dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k+1} x^{k+1},$$

där dessa potensserier har samma konvergensradie R.

Exempel

För vilka $x \in \mathbf{R}$ konvergerar $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{x^{3k}}{8^k \ln k}$?

Lösning. Vi börjar med att bestämma konvergensradien R för serien. Eftersom

$$\left|\frac{x^{3k}}{8^k \ln k}\right|^{1/k} = \left(\frac{|x|}{2}\right)^3 e^{-\frac{1}{k}\ln\ln k} \to \left(\frac{|x|}{2}\right)^3, \quad \text{då } k\to\infty,$$

så är serien enligt rotkriteriet absolutkonvergent då

$$\left(\frac{|x|}{2}\right)^3 < 1 \quad \Leftrightarrow \quad |x| < 2$$

och divergent om $x > 2$ eller $x < -2$. Kvar att undersöka är punkterna $x = \pm 2$. Om $x = 2$ ges serien av

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{2^{3k}}{8^k \ln k} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\ln k}$$

som är divergent eftersom $\ln k \leq k$ och den harmoniska serien är divergent. Om $x = -2$ kan serien uttryckas

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-2)^{3k}}{8^k \ln k} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\ln k}.$$

Eftersom termerna i denna serie avtar mot noll, dvs $1/\ln(k+1) < 1/\ln k$ och $1/\ln k \to 0$, samt att serien är alternerande, följer det att serien är konvergent enligt Leibniz kriterium.
Svar: $-2 \leq x < 2$.

4 Uppskattningar

Vi har tagit fram verktyg för att överskatta (eller underskatta) både hela serier och svansen på serier. Detta är ett viktigt verktyg för att både uppskatta storlek på funktionsvärden (om en funktion är given som en potensserie) eller hur många termer man behöver ta med för att få en bra approximation.

Exempel

Låt $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k}{k}$ för $-1 < x \leq 1$. Visa att

$$-\frac{391}{960} < f(1/2) < -\frac{77}{192} \qquad \text{och} \qquad \frac{131}{192} < f(-1/2) < \frac{667}{960}.$$

Lösning. Kvot- eller rottestet visar att serien har konvergensradie 1, så det är inga problem att betrakta $f(\pm 1/2)$. Om $x = 1/2$ så är serien alternerande och termernas belopp avtar monotont mot noll. Alltså konvergerar även serien enligt Leibniz kriterium och vi kan använda uppskattningar för sådana serier. Vi har därmed att

$$f(1/2) = \underbrace{-\frac{1}{2} + \frac{1}{12} - \frac{1}{24}}_{=-5/12} + \sum_{k=4}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^k k} \leq -\frac{5}{12} + \frac{(-1)^4}{16\cdot 4} = -\frac{77}{192},$$

där vi utnyttjat att svansen på serien är positiv och utgör en serie konvergent enligt Leibniz kriterium. På liknande sätt ser vi att

$$f(1/2) = \underbrace{-\frac{1}{2} + \frac{1}{12} - \frac{1}{24} + \frac{1}{64}}_{=-77/192} + \sum_{k=5}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^k k} \geq -\frac{77}{192} - \frac{1}{32 \cdot 5} = -\frac{391}{960}.$$

där vi utnyttjat att svansen på serien nu är negativ och utgör en serie konvergent enligt Leibniz kriterium. Vi tar alltså med olika många termer beroende på om vi vill att svansen ska vara positiv eller negativ!
Om $x = -1/2$ så är inte serien längre alternerande så vi måste hitta på något annat. Vi ser att

$$f(-1/2) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k k} = \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{24} + \frac{1}{64}}_{=131/192} + \sum_{k=5}^{\infty} \frac{1}{k2^k}$$

och

$$0 < \sum_{k=5}^{\infty} \frac{1}{k2^k} < \frac{1}{5} \sum_{k=5}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{5} \left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \frac{1}{1-1/2} = \frac{1}{5 \cdot 2^4} = \frac{1}{80},$$

där vi överskattade med en geometrisk serie som har kvoten $1/2$ och första term $(1/2)^5$. Således måste

$$\frac{131}{192} < f(-1/2) < \frac{131}{192} + \frac{1}{80} = \frac{667}{960}.$$

Notera att vi faktiskt vet att $f(1/2) = \ln(2/3)$ och att $f(-1/2) = \ln 2$ (varför?). Ovanstående argument ger alltså uppskattningar för $\ln(2/3)$ och $\ln 2$.

5 DE med potensserieansats

Vi kan även använda en potensserieansats för att hitta lösningar till linjära differentialekvationer. Åtminstone kan vi finna de lösningar som kan representeras som en potensserie.

Exempel

Lös ekvationen $y' - 2xy = 1$, $y(0) = 0$, med potensserieansats. I svaret skall anges (minst) fyra nollskilda koefficienter, rekursionsformeln för seriens koefficienter och potensseriens konvergensradie.

Lösning. Vi ansätter en potensserie

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k,$$

med konvergensradie $R > 0$. Då gäller att

$$y'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} c_{k+1}(k+1)x^k$$

samt

$$2xy(x) = \sum_{k=0}^{\infty} 2c_k x^{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} 2c_{k-1} x^k.$$

Alltså måste

$$1 = y' - 2xy = c_1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(c_{k+1}(k+1) - 2c_{k-1}\right) x^k.$$

Eftersom koefficienterna är entydiga så innebär detta att $c_1 = 1$ samt att

$$c_{k+1}(k+1) - 2c_{k-1} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad c_{k+1} = \frac{2c_{k-1}}{k+1}, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Villkoret att $y(0) = 0$ ger att $c_0 = 0$, vilket resulterar i att

$$c_2 = c_4 = c_6 = \cdots = 0.$$

För udda index ser vi att

$$\begin{aligned} c_1 &= 1 \\ c_3 &= \frac{2c_1}{3} = \frac{2}{3} \\ c_5 &= \frac{2c_3}{5} = \frac{2^2}{3 \cdot 5} \\ c_7 &= \frac{2c_5}{7} = \frac{2^3}{3 \cdot 5 \cdot 7} \\ &\vdots \\ c_{2k+1} &= \frac{2^k}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2k+1)}. \end{aligned}$$

Svaret ges alltså av serien

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k+1} x^{2k+1}$$

då de jämna termerna försvinner. Här är c_{2k+1} koefficienterna vi bestämde ovan. Konvergensradien kan vi enklast finna medelst kvottestet:

$$\left| \frac{c_{2(k+1)+1} x^{2(k+1)+1}}{c_{2k+1} x^{2k+1}} \right| = \left| \frac{c_{2k+3}}{c_{2k+1}} \right| |x|^2 = \left| \frac{2}{2k+3} \right| |x|^2 \to 0,$$

där vi använde rekursionsformeln

$$\frac{c_{k+1}}{c_{k-1}} = \frac{2}{k+1}$$

som vi härledde ovan. Konvergensradien är således oändlig.

Svar: $y(x) = x + \dfrac{2x^3}{3} + \dfrac{4x^5}{15} + \dfrac{8x^7}{105} + \cdots$, $R = \infty$.