GNP

$$\int_0^\infty$$

Generaliserade integraler
Numeriska serier
Potensserier

$$\sum_0^\infty$$

Lars Alexandersson

2006 & 2020

Innehåll

G Generaliserade integraler

Tidigare har vi definierat integraler av typen

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

där $[a,b]$ är ett slutet och begränsat intervall och f är kontinuerlig på $[a,b]$. I själva verket räcker det att f är begränsad och styckvis kontinuerlig i det öppna begränsade intervallet $]a,b[$, d.v.s. kontinuerlig utom möjligen i ändligt många punkter i $]a,b[$.

Vi ska nu generalisera integralbegreppet till att även omfatta *obegränsade intervall* och *obegränsade funktioner*; vi ska dock fortsätta att kräva att funktionerna är styckvis kontinuerliga.

Antag därför att f är kontinuerlig i $]a,b[$ utom möjligen i ändligt många punkter, och att $-\infty \le a < b \le \infty$. Vi säger att en integral $\int_a^b f(x)\,dx$ är **generaliserad i $\boldsymbol{\infty}$** (respektive $\boldsymbol{-\infty}$) om $b = \infty$ (respektive $a = -\infty$). Vi säger också att den är **generaliserad i $\boldsymbol{c}$** om $a \le c \le b$ och f är obegränsad nära c (vilket betyder att det finns någon följd $x_j \to c$, där $a < x_j < b$ och $x_j \ne c$, sådan att $|f(x_j)| \to \infty$ då $j \to \infty$). Slutligen säger vi att den är **generaliserad** om den är generaliserad någonstans.

G.1. Exempel. $\displaystyle\int_{-\infty}^1 \frac{dx}{x^3-4x}$ är generaliserad i $-\infty$, -2 och 0, ty integranden

$$f(x) = \frac{1}{x^3-4x} = \frac{1}{x(x+2)(x-2)}$$

är obegränsad nära -2 och 0; observera att 2 ligger utanför integrationsintervallet $]-\infty,1[$. ▲

G.2. Exempel. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ är generaliserad i ∞, men faktiskt inte i 0 (varför inte?). ▲

G.3. Definition. Antag att f är kontinuerlig i $]a,b[$, där $-\infty \le a < b \le \infty$, utom möjligen i ändligt många punkter.

- Om integralen $\int_a^b f(x)\,dx$ är generaliserad endast i b sägs den vara **konvergent** om $\lim_{c\to b^-} \int_a^c f(x)\,dx$ existerar ändligt; detta gränsvärde sägs då vara integralens **värde** och vi skriver $\int_a^b f(x)\,dx =$ detta värde. På motsvarande sätt definieras konvergens av $\int_a^b f(x)\,dx$ när denna är generaliserad endast i a som att $\lim_{c\to a^+} \int_c^b f(x)\,dx$ existerar ändligt.
- En integral $\int_a^b f(x)\,dx$ som är generaliserad i både a och b (och bara där) sägs vara konvergent om de båda delintegralerna $\int_a^c f(x)\,dx$ och $\int_c^b f(x)\,dx$, där $a < c < b$, är konvergenta; värdet definieras som summan av delintegralernas värden.
- Slutligen, om $c_1 < c_2 < \ldots < c_n$ är en uppräkning av de ändligt många punkter mellan a och b där $\int_a^b f(x)\,dx$ är generaliserad, sägs integralen vara konvergent om alla delintegraler $\int_a^{c_1} f(x)\,dx$, $\int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx$, $\ldots$, $\int_{c_{n-1}}^{c_n} f(x)\,dx$, $\int_{c_n}^b f(x)\,dx$ är konvergenta; värdet är då summan av alla delintegralers värden.

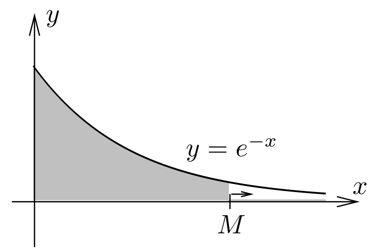
En integral som inte är konvergent sägs vara **divergent**.

G.1 Direkt undersökning med primitiv funktion

Ibland är det någorlunda lätt att hitta en primitiv funktion till integranden, och då kan frågan om konvergens och beräkning av integralens värde reduceras till renodlade gränsvärdesundersökningar.

G.4. Exempel (Obegränsat intervall). $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}\,dx$ är generaliserad i ∞, och

$$\int_0^M e^{-x}\,dx = \big[-e^{-x}\big]_0^M = 1 - e^{-M} \to 1 \quad \text{då } M \to \infty,$$



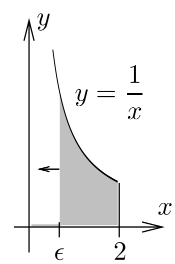
så integralen är konvergent och har värde 1; vi skriver

$$\int_0^\infty e^{-x} dx = 1.$$

Den geometriska tolkningen av detta är att området mellan positiva x-axeln, positiva y-axeln och kurvan $y = e^{-x}$ har area 1. ▲

G.5. Exempel (Obegränsad funktion). $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{x}$ är generaliserad i 0, och

$$\int_\epsilon^2 \frac{dx}{x} = \big[\ln x\big]_\epsilon^2 = \ln 2 - \ln\epsilon \to \infty \quad \text{då } \epsilon \to 0^+,$$



så integralen är divergent. Tolkningen är att arean av området mellan kurvan $y = 1/x$, linjen $x = 2$ och de positiva koordinataxlarna är obegränsat stor.

På samma sätt får man att $\int_0^2 \big(1/\sqrt{x}\big)\,dx$ däremot är konvergent, med värde $2\sqrt{2}$, ty $\int_\epsilon^2 \big(1/\sqrt{x}\big)\,dx = \big[2\sqrt{x}\big]_\epsilon^2 = 2\sqrt{2} - 2\sqrt{\epsilon} \to 2\sqrt{2}$ då $\epsilon \to 0^+$. ▲

G.6. Exempel (Gränsvärde saknas). $\displaystyle\int_{-\infty}^7 \sin x\,dx$ är generaliserad i $-\infty$, och

$$\int_M^7 \sin x\,dx = \big[-\cos x\big]_M^7 = -\cos 7 + \cos M,$$

som saknar gränsvärde då $M \to -\infty$, så $\int_{-\infty}^7 \sin x\,dx$ är divergent (och saknar värde). ▲

G.7. Exempel (Generaliserad i båda ändpunkterna). $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$ är generaliserad både i 0 och i ∞, så därför undersöker vi $\int_0^5$ och $\int_5^\infty$ separat (eller t.ex. $\int_0^{17}$ och $\int_{17}^\infty$).

En primitiv till $f(x) = 1/\big(\sqrt{x}\,(1+x)\big)$ är $F(x) = 2\arctan\sqrt{x}$, vilket kan ses med bytet $t = \sqrt{x}$. Alltså,

$$\int_0^5 f(x)\,dx = F(5) - \lim_{x\to 0^+} F(x) = F(5) - 0$$

och

$$\int_5^\infty f(x)\,dx = \lim_{x\to\infty} F(x) - F(5) = \pi - F(5),$$

så båda delintegralerna är konvergenta. Därmed är vår ursprungliga integral konvergent, med värde

$$\int_0^\infty f(x)\,dx = \int_0^5 f(x)\,dx + \int_5^\infty f(x)\,dx = \big(F(5) - 0\big) + \big(\pi - F(5)\big) = \pi.$$

Här ser vi också varför det går lika bra med 17 som med 5; i själva verket kan vi direkt skriva

$$\int_0^\infty f(x)\,dx = \lim_{x\to\infty} F(x) - \lim_{x\to 0^+} F(x) = \big[F(x)\big]_{0^+}^\infty,$$

och integralen är konvergent eftersom båda dessa gränsvärden existerar ändligt. ▲

G.8. Exempel (Generaliserad i många punkter). $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+x^3}$ är generaliserad i $-\infty$, -1, 0 och ∞, så vi får studera $\int_{-\infty}^{-1}$, $\int_{-1}^{0}$ och $\int_{0}^{\infty}$ separat. Eftersom

$$f(x) = \frac{1}{x^2+x^3} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} \quad \text{har en primitiv} \quad F(x) = -\frac{1}{x} + \ln\left|\frac{x+1}{x}\right|$$

i vart och ett av delintervallen $]-\infty,-1[$, $]-1,0[$ och $]0,\infty[$ är integralen konvergent med värde

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \big[F(x)\big]_{-\infty}^{-1^-} + \big[F(x)\big]_{-1^+}^{0^-} + \big[F(x)\big]_{0^+}^{\infty},$$

förutsatt att alla dessa sex gränsvärden existerar ändligt. Men exempelvis $\lim_{x\to -1^+} F(x)$ existerar inte ändligt, så integralen är divergent. ▲

Enkla gränsvärdesregler medför genast att konvergenta generaliserade integraler har samma linjaritetsegenskaper som vanliga integraler. Vi utelämnar beviset.

G.9. Proposition (Linjaritet). Om $\int_a^b f(x)\,dx$ och $\int_a^b g(x)\,dx$ båda är konvergenta generaliserade integraler (där a och b får vara $-\infty$ respektive ∞) och c är en konstant, så är de båda integralerna $\int_a^b \big(f(x)+g(x)\big)\,dx$ och $\int_a^b c\,f(x)\,dx$ också konvergenta, och

$$\begin{aligned} \int_a^b \big(f(x)+g(x)\big)\,dx &= \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx, \\ \int_a^b c\,f(x)\,dx &= c\int_a^b f(x)\,dx. \end{aligned}$$

⋆ ÖVNINGAR

⋆ **G.1** Antag att $\int_a^b f(x)\,dx$ är generaliserad endast i b. Visa att då är $\int_a^b f(x)\,dx$ konvergent om och endast om $\int_c^b f(x)\,dx$ är konvergent för något c med $a<c<b$.

⋆ **G.2** Räkna ut värdena av följande generaliserade integraler om de är konvergenta.

(a) $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{x\,dx}{x^2+4}$ (b) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{9+4x^2}$ (c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x\,e^{-x^2}\,dx$ (d) $\displaystyle\int_0^{\infty} x\,e^{-x}\,dx$

(e) $\displaystyle\int_{\pi}^{\infty} \cos^3 x\,dx$ (f) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x}$ (g) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{|x|}}$ (h) $\displaystyle\int_0^{2} \ln x\,dx$

(i) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ (j) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{2\,dx}{x^3+x}$ (k) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x}$ (l) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}$

⋆ **G.3** (a) Visa att $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x}$ och $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x+1}$ båda är divergenta.

(b) Vad kan sägas om $\displaystyle\int_1^{\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) dx$ respektive $\displaystyle\int_1^{\infty} \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x+1}\right) dx$?

⋆ **G.4** Antag att $\int_a^b f(x)\,dx$ är konvergent och att $\int_a^b g(x)\,dx$ är divergent. Är då integralen $\int_a^b \big(f(x)+g(x)\big)\,dx$ divergent? Bevis eller motexempel!

G.2 Positiva integrander

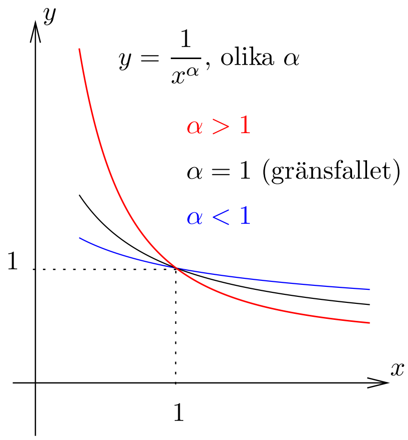
I föregående avsnitt var exemplen och övningarna valda så att vi någorlunda lätt kunde bestämma primitiver till integranderna och därmed avgöra konvergens/divergens genom att helt enkelt undersöka gränsvärden av dessa primitiver. I många situationer är det svårt eller i praktiken omöjligt att hitta primitiver – eller också behöver man inte integralens exakta värde. I dessa fall kan man jämföra den givna integralen med integraler som man kan beräkna exakt eller åtminstone uppskatta värdet av. Speciellt enkelt är detta om integranden ***f* är positiv**, vilket i detta sammanhang betyder att $f(x) \geq 0$ för aktuella x.

Man jämför ofta med följande integraler:

G.10. Proposition (Jämförelseintegraler). Låt α vara en konstant. Då gäller:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx \quad \text{är konvergent} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha > 1, \tag{G.1}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx \quad \text{är konvergent} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha < 1. \tag{G.2}$$



Talet 1 i integrationsgränserna kan naturligtvis bytas mot vilket annat tal c, $0 < c < \infty$, som helst.

Bevis. Vi bevisar (G.1); beviset av (G.2) är snarlikt och lämnas som Övning G.5.

$$\int_1^M \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \int_1^M x^{-\alpha}\,dx = \begin{Bmatrix} \dfrac{1-M^{1-\alpha}}{\alpha-1}, & \alpha \neq 1, \\ \ln M, & \alpha = 1, \end{Bmatrix} \to \begin{Bmatrix} \dfrac{1}{\alpha-1}, & \alpha > 1, \\ \infty, & \alpha \leq 1, \end{Bmatrix} \text{då } M \to \infty,$$

d.v.s. integralen är konvergent om och endast om $\alpha > 1$. ■

För båda jämförelseintegralerna är alltså gränsfallet $\alpha = 1$; då är $\ln x$ en primitiv och denna blir ju obegränsad både då $x \to \infty$ och då $x \to 0^+$.

G.11. Sats (Jämförelsekriteriet). Om $0 \leq f(x) \leq g(x)$ då $a < x < b$, där a och b får vara $-\infty$ respektive ∞, så gäller

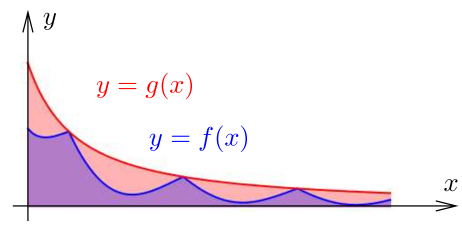
- $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$ är konvergent $\implies$ $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ är konvergent,

  och $\quad 0 \leq \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx;$

- $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ är divergent $\implies$ $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$ är divergent.

Bevis. Vi antar först att integralerna är generaliserade endast i b. Om $\int_a^b g(x)\,dx$ är konvergent (med värde M, säg) och $a < c < b$, så gäller, eftersom $0 \leq f(x) \leq g(x)$ då $a < x < b$,

$$0 \le \int_a^c f(x)\,dx \le \int_a^c g(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx = M.$$



Alltså är den växande funktionen

$$c \mapsto \int_a^c f(x)\,dx, \quad a < c < b,$$

uppåt begränsad av M, och därför existerar $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c\to b^-} \int_a^c f(x)\,dx \le M$ enligt supremumaxiomet.

Ett liknande argument tar hand om fallet då integralerna är generaliserade endast i a, och om integralerna är generaliserade i flera punkter kan ovanstående resonemang genomföras på alla delintegraler.

Eftersom den andra delen av satsen bara är ett annat sätt att formulera den första delen är vi klara. ■

En naturlig tolkning av vad satsen säger är att en delmängd av en mängd med ändlig area också har ändlig area, se figuren ovan.

G.12. Exempel. Vi ska undersöka $I = \displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^2 + |\sin x|}$. Eftersom $|\sin x| \ge 0$ får vi

$$0 \le \frac{1}{x^2 + |\sin x|} \le \frac{1}{x^2 + 0} = \frac{1}{x^2} \quad \text{då } x > 1, \qquad \text{så} \qquad 0 \le \int_1^\infty \frac{dx}{x^2 + |\sin x|} \le \int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = 1.$$

Vår integral I är alltså konvergent, och $0 \le I \le 1$. (För en bättre undre gräns, se Övning G.6.) ▲

G.13. Följdsats (Jämförelsekriteriet på kvotform). Om

- $f \ge 0$ och $g \ge 0$ på $[a, b[$, där b får vara ∞;
- de båda integralerna $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ och $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$ är generaliserade endast i b; och
- $\dfrac{f(x)}{g(x)} \to A$ då $x \to b^-$, där $0 < A < \infty$,

så är integralerna $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ och $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$ antingen båda konvergenta eller båda divergenta.

Motsvarande gäller om integralerna endast är generaliserade i a, där a får vara $-\infty$.

Bevis. Välj tal m och M sådana att $0 < m < A < M < \infty$. Eftersom $f(x)/g(x) \to A$ då $x \to b^-$ finns ett tal c sådant att $a < c < b$ och

$$m \le \frac{f(x)}{g(x)} \le M \quad \text{då } c < x < b, \qquad \text{så} \qquad 0 \le mg(x) \le f(x) \le Mg(x) \quad \text{då } c < x < b.$$

För integraler $\int_a^b$ som är generaliserade endast i b gäller att $\int_a^b$ är konvergent om och endast om $\int_c^b$ är konvergent (se Övning G.1), så i fortsättningen studerar vi $\int_c^b$.

Om $\int_c^b f(x)\,dx$ är konvergent, så är $\int_c^b mg(x)\,dx$ konvergent enligt Jämförelsekriteriet (Sats G.11), och därmed är $\int_c^b g(x)\,dx$ konvergent. Omvänt, om $\int_c^b f(x)\,dx$ är divergent, så är $\int_c^b Mg(x)\,dx$ divergent enligt samma kriterium, och därmed är $\int_c^b g(x)\,dx$ divergent. ■

G.14. Exempel. Vi ska undersöka om

$$\int_2^\infty \frac{\arctan x}{x^3 - x^2}\,dx$$

är konvergent. Integralen är generaliserad endast i ∞, och

$$f(x) = \frac{\arctan x}{x^3 - x^2} = \frac{1}{x^3} \cdot \frac{\arctan x}{1 - 1/x} = g(x) \cdot \frac{\arctan x}{1 - 1/x}.$$

Vi får

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\arctan x}{1 - 1/x} \to \frac{\pi}{2} = A \quad \text{då } x \to \infty.$$

Eftersom $0 < A < \infty$ och $\int_2^\infty g(x)\,dx = \int_2^\infty (1/x^3)\,dx$ är konvergent och generaliserad endast i ∞ ger Jämförelsekriteriet på kvotform att vår givna integral $\int_2^\infty f(x)\,dx$ också är konvergent. ▲

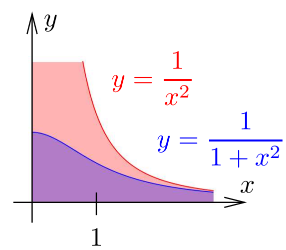
G.15. Exempel (Fallgropar). Vi vet ju att

$$I = \int_0^\infty \frac{dx}{1 + x^2} = \big[\arctan x\big]_0^\infty = \frac{\pi}{2}.$$

Om vi vill visa konvergens utan att beräkna exakta värdet kan vi, eftersom

$$(*) \qquad 0 \le \frac{1}{1 + x^2} \le \frac{1}{x^2}, \quad x > 0,$$

försöka använda Jämförelsekriteriet (Sats G.11) med $f(x) = 1/(1+x^2)$ och $g(x) = 1/x^2$. Här är dock $\int_0^\infty g(x)\,dx$ divergent (arean under den röda grafen i figuren är oändligt stor) och därför ger satsen inget besked om $\int_0^\infty f(x)\,dx$ (arean under den blå grafen).



Olikheten $(*)$ ovan är visserligen korrekt, men den är dålig när x är nära 0. För att komma runt detta kan vi använda Jämförelsekriteriet på intervallet $]1, \infty[$, t.ex.; $\int_1^\infty g(x)\,dx$ är ju konvergent, och därmed är $\int_1^\infty f(x)\,dx$ konvergent, och eftersom

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1 + x^2} = \int_0^1 \frac{dx}{1 + x^2} + \int_1^\infty \frac{dx}{1 + x^2},$$

där $\int_0^1 f(x)\,dx$ är en vanlig (ej generaliserad) integral, är alltså vår integral konvergent.

Om vi i stället försöker använda Jämförelsekriteriet på kvotform (Följdsats G.13) med samma f och g som ovan,

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1/(1 + x^2)}{1/x^2} = \frac{1}{1/x^2 + 1} \to 1 \quad \text{då } x \to \infty,$$

kan vi förledas att tro att $\int_0^\infty f(x)\,dx$ är divergent eftersom $\int_0^\infty g(x)\,dx$ är divergent. Det som gör att Följdsats G.13 inte är tillämplig är att $\int_0^\infty g(x)\,dx$ är generaliserad *både* i 0 och i ∞. (Däremot fungerar den på intervallet $]1, \infty[$, ty $\int_1^\infty g(x)\,dx$ är generaliserad endast i ∞.) ▲

G.16. Exempel. Vi undersöker

$$\int_0^\infty \frac{\big|\sin(1/x)\big|}{\sqrt{x}}\,dx.$$

Integralen är generaliserad både i 0 och i ∞, så vi delar upp den vid $x = 1$, säg.

På $]0, 1[$ kan vi använda att $|\sin t| \le 1$ för alla t, och därmed att

$$0 \le f(x) = \frac{\big|\sin(1/x)\big|}{\sqrt{x}} \le \frac{1}{\sqrt{x}} = g(x), \quad 0 < x < 1,$$

och eftersom $\int_0^1 g(x)\,dx = \int_0^1 (1/x^{1/2})\,dx$ är konvergent enligt Proposition G.10 är också $\int_0^1 f(x)\,dx$ konvergent enligt Jämförelsekriteriet.

På $]1,\infty[$ kan vi i stället Maclaurinutveckla, $\sin t = t + \mathcal{O}(t^3)$ med $t = 1/x \to 0^+$ då $x \to \infty$, så

$$f(x) = \frac{\left|\sin(1/x)\right|}{\sqrt{x}} = \frac{\left|1/x + \mathcal{O}(1/x^3)\right|}{\sqrt{x}} = \frac{1}{x^{3/2}} \cdot \left|1 + \mathcal{O}(1/x^2)\right|,$$

så med $g(x) = 1/x^{3/2}$ (obs! annat $g(x)$) får vi

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \left|1 + \mathcal{O}(1/x^2)\right| \to 1 = A \quad \text{då } x \to \infty.$$

Eftersom $0 < A < \infty$ och $\int_1^\infty g(x)\,dx = \int_1^\infty (1/x^{3/2})\,dx$ är konvergent enligt Proposition G.10 är också $\int_1^\infty f(x)\,dx$ konvergent enligt Jämförelsekriteriet på kvotform.

Sammantaget är $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\left|\sin(1/x)\right|}{\sqrt{x}}\,dx = \int_0^1 \frac{\left|\sin(1/x)\right|}{\sqrt{x}}\,dx + \int_1^\infty \frac{\left|\sin(1/x)\right|}{\sqrt{x}}\,dx$ konvergent. ▲

G.17. Exempel. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\ln x}{2x^7 - x^6}\,dx$ är generaliserad endast i ∞ och har positiv integrand. Vi kan skriva

$$f(x) = \frac{\ln x}{2x^7 - x^6} = \frac{1}{x^6} \cdot \frac{\ln x}{2x - 1},$$

och eftersom $(\ln x)/(2x-1) \to 0$ då $x \to \infty$ är Jämförelsekriteriet på kvotform inte tillämpligt – det kräver ju att gränsvärdet A uppfyller $0 < A < \infty$. Det faktum att kvoten är positiv och att gränsvärdet är 0 ger oss i stället ett (stort) tal $M > 1$ sådant att

$$0 \le \frac{\ln x}{2x-1} \le 1 \quad \text{då } x > M, \qquad \text{och därmed att} \qquad 0 \le f(x) \le \frac{1}{x^6} \quad \text{då } x > M.$$

$\int_M^\infty (1/x^6)\,dx$ är ju konvergent, så Jämförelsekriteriet ger att $\int_M^\infty f(x)\,dx$ är konvergent, och därmed är också $\int_1^\infty f(x)\,dx = \int_1^M f(x)\,dx + \int_M^\infty f(x)\,dx$ konvergent, eftersom $\int_1^M f(x)\,dx$ ju är en vanlig (ej generaliserad) integral. ▲

⋆ ÖVNINGAR

⋆ **G.5** Bevisa (G.2) i Proposition G.10.

⋆ **G.6** Förbättra uppskattningen i Exempel G.12 till $\displaystyle\frac{\pi}{4} \le \int_1^\infty \frac{dx}{x^2 + |\sin x|} \le 1.$

⋆ **G.7** Vi vill uppskatta $I = \int_1^\infty e^{-x^2}\,dx$. Klart är att både $0 \le e^{-x^2} \le xe^{-x^2}$ och $0 \le e^{-x^2} \le e^{-x}$ då $x > 1$ (varför?). Vilka uppskattningar av I ger detta? Vilken uppskattning är bäst?

⋆ **G.8** Avgör om följande integraler är konvergenta eller divergenta!

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^4 + \sqrt{x}}$ (b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{2x - x^4}$ (c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{1 + x^6}$ (d) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x^2+1}{x^3+1}\,dx$

(e) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx$ (f) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^4 - 1}}$ (g) $\displaystyle\int_0^\pi \frac{dx}{x + \sin x}$ (h) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sqrt{x - \sin x}}{x^2}\,dx$

(i) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{|\cos x|\,dx}{x\sqrt{x}}$ (j) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{\tan x}}$ (k) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^3\,dx}{e^x - 1}$ (l) $\displaystyle\int_0^\infty \left(\sqrt{x^2+2} - \sqrt[3]{x^3 + 3x}\right)dx$

⋆ **G.9** Visa att $\displaystyle\ln 2 \le \int_0^\infty \frac{dx}{x + e^x} \le 1.$ (Ledning för undre gränsen: $e^x \ge 1 + x$ för alla x.)

⋆ **G.10** Visa att för varje $c > 0$ gäller

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{4x + x^3}} \le \int_0^c \frac{dx}{\sqrt{4x}} + \int_c^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^3}}.$$

Vilket värde på c ger bästa (d.v.s. minsta) övre begränsning, och vilken är denna optimala övre begränsning?

⋆ **G.11** I Övning G.2 såg vi att $\int_0^\infty x\, e^{-x}\, dx$ är konvergent och beräknade dess värde. Vi ska nu undersöka $\int_0^\infty x^n e^{-x}\, dx$ för ett allmänt positivt heltal n.
(a) Visa att denna integral är konvergent (utan att beräkna dess värde).
(b) Beräkna integralens värde.

G.3 Absolutkonvergenta integraler

En generaliserad integral $\int_a^b f(x)\, dx$ kallas **absolutkonvergent** om integralen $\int_a^b |f(x)|\, dx$ är konvergent. Notera att denna senare integral har positiv integrand, så kriterier i Avsnitt G.2 kan användas på den.

G.18. Sats. Absolutkonvergenta integraler är konvergenta, och för dem gäller

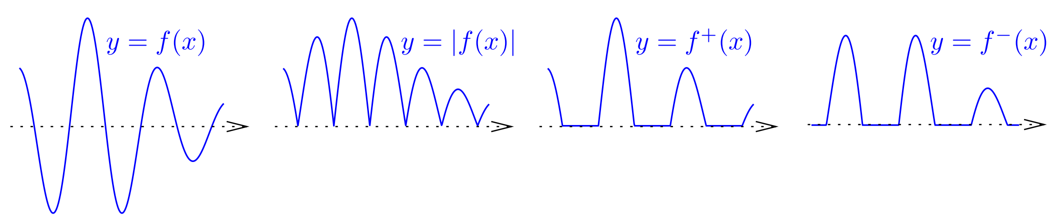
$$\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| \le \int_a^b \big| f(x) \big|\, dx,$$

där $-\infty \le a < b \le \infty$.

Bevis. Sätt

$$f^+ = \frac{|f| + f}{2} \qquad \text{och} \qquad f^- = \frac{|f| - f}{2},$$

de så kallade positiva och negativa delarna av f. Notera att $f^+ - f^- = f$ och $f^+ + f^- = |f|$, samt att $0 \le f^+ \le |f|$ och $0 \le f^- \le |f|$.



Antag att $\int_a^b |f(x)|\, dx$ är konvergent. Eftersom $0 \le f^\pm \le |f|$ medför Jämförelsekriteriet att integralerna $\int_a^b f^\pm(x)\, dx$ båda är konvergenta och ≥ 0. Som en konsekvens är

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b f^+(x)\, dx - \int_a^b f^-(x)\, dx$$

konvergent. Triangelolikheten för tal, $|s - t| \le |s| + |t|$, tillsammans med identiteten $f^+ + f^- = |f|$ ger sedan

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| \le \left| \int_a^b f^+(x)\, dx \right| + \left| \int_a^b f^-(x)\, dx \right| = \int_a^b f^+(x)\, dx + \int_a^b f^-(x)\, dx = \int_a^b |f(x)|\, dx.$$

■

G.19. Exempel. Vi vill undersöka om integralen

$$\int_5^\infty \frac{\sin x}{x^2}\,dx$$

är konvergent, samt även uppskatta dess värde om den är konvergent. Sätt därför $f(x) = (\sin x)/x^2$. Eftersom

$$0 \le |f(x)| = \left|\frac{\sin x}{x^2}\right| \le \frac{1}{x^2} = g(x), \quad x > 5,$$

och $\int_5^\infty g(x)\,dx$ är konvergent, ger Jämförelsekriteriet att $\int_5^\infty |f(x)|\,dx$ är konvergent, och därmed att $\int_5^\infty f(x)\,dx$ är (absolut)konvergent. För dess värde I gäller

$$|I| = \left|\int_5^\infty \frac{\sin x}{x^2}\,dx\right| \le \int_5^\infty \left|\frac{\sin x}{x^2}\right|\,dx \le \int_5^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = \frac{1}{5},$$

så vi vet i alla fall att $-1/5 \le I \le 1/5$, även om vi inte lyckas hitta det exakta värdet. ▲

G.20. Exempel. Man kan visa att integralen

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$$

inte är absolutkonvergent (se Övning N.14), men vi ska här se att den i alla fall är konvergent. Integralen är generaliserad endast i ∞, så vi kan nöja oss med att studera t.ex. $\int_\pi^\infty$ för att avgöra konvergens. Vi får nu med partialintegration

$$\int_\pi^M \frac{\sin x}{x}\,dx = \left[\frac{-\cos x}{x}\right]_\pi^M - \int_\pi^M \frac{\cos x}{x^2}\,dx \to -\frac{1}{\pi} - \int_\pi^\infty \frac{\cos x}{x^2}\,dx$$

då $M \to \infty$, där den sista integralen är absolutkonvergent (jämför Exempel G.19).

Som kuriosa kan nämnas att i själva verket är

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2},$$

något som kan visas med metoder i komplex analys eller Fourieranalys. ▲

⋆ ÖVNINGAR

⋆ **G.12** Visa att $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos x\,dx}{x^2+1}$ är konvergent och att för dess värde I gäller $|I| \le \pi/2$.
(I kurser i komplex analys kan man t.o.m. visa att $I = \pi/2e$)

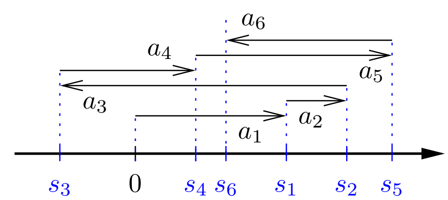
⋆ **G.13** Är följande integraler absolutkonvergenta? (a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin(x^2)}{x^2}\,dx$ (b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x-\sqrt{x}}{2x+x^2}\,dx$.

⋆ **G.14** Beräkna $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\ln x\,dx}{1+x^2}$, förslagsvis genom att först visa att integralen är absolutkonvergent och sedan genomföra variabelbytet $t = 1/x$.

N Numeriska serier

Låt a_1, a_2, a_3, …, vara en oändlig följd av tal. Vad ska vi mena med summan av alla dessa tal? Vi kan naturligtvis summera *ändligt* många av talen och bildar därför de s.k. **delsummorna** (eller partialsummorna) s_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$, enligt

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1, \\ s_2 &= a_1 + a_2, \\ s_3 &= a_1 + a_2 + a_3, \\ &\ldots \\ s_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k. \end{aligned}$$



En tolkning är att a_k är steg nummer k i en promenad, framåt om $a_k > 0$, bakåt om $a_k < 0$, och att s_n är nettoförflyttningen i denna promenad efter n steg, framåt om $s_n > 0$, bakåt om $s_n < 0$.

Med en **serie** menar vi nu en formell konstruktion

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} a_k,$$

och talen a_k kallas seriens **termer**.

N.1. Definition. Vi säger att serien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ är **konvergent** om $\lim_{n\to\infty} s_n$ existerar ändligt, där $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$; detta gränsvärde kallas då seriens **summa** s och vi skriver $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = s$. I annat fall sägs serien vara **divergent**.

Termernas numrering behöver inte börja just i 1, och inte heller behöver summationsvariabeln heta k. Det går lika bra att studera t.ex. $\sum_{j=-2}^{\infty} b_j = b_{-2} + b_{-1} + b_0 + b_1 + \ldots$

⋆ ÖVNINGAR

⋆ **N.1** Visa att $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ är konvergent om och endast om $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ är konvergent för något $N \geq 1$. (Ändligt många termer kan alltså tas bort utan att konvergensen påverkas; jämför Övning G.1.)

⋆ **N.2** Antag att $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ och $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ är konvergenta och att c är ett tal. Visa att då är

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \\ \sum_{n=1}^{\infty} c\, a_n &= c \sum_{n=1}^{\infty} a_n \end{aligned}$$

där serierna till vänster också är konvergenta. (Jämför Proposition G.9.)

⋆ **N.3** Hur ser motsvarigheten till Övning G.4 ut för serier?

⋆ **N.4** Visa att följden av delsummor s_n till en konvergent serie är begränsad, d.v.s. att det finns ett tal M sådant att $|s_n| \leq M$ för alla n.

N.1 Direkt undersökning med delsummor

Det är ofta svårare att beräkna seriers summor än generaliserade integralers värden. I några fall är detta dock möjligt, och för den kanske viktigaste serien av alla, den geometriska serien, går det:

N.2. Proposition. För den **geometriska serien** med kvot q gäller:

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots \quad \text{är} \quad \begin{cases} \text{konvergent med summa } \dfrac{1}{1-q} & \text{om } |q| < 1, \\ \text{divergent} & \text{om } |q| \geq 1. \end{cases}$$

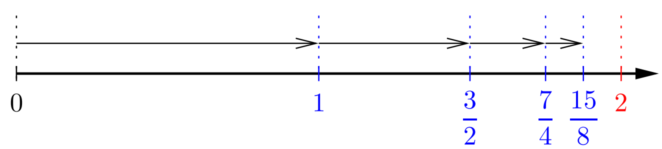
Bevis. Direkt uträkning av delsummorna för $n = 0, 1, 2, \ldots$ ger

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = 1+q+q^2+\ldots+q^n = \begin{cases} \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}, & q \neq 1, \\ n+1, & q = 1, \end{cases} \to \begin{cases} \dfrac{1}{1-q}, & |q| < 1, \\ \infty, & q \geq 1, \\ \text{(saknas)}, & q \leq -1, \end{cases} \quad \text{då } n \to \infty,$$

och därmed är beviset klart. ■

N.3. Exempel. Den geometriska serien med kvot $1/2$ har summan

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots = \frac{1}{1 - 1/2} = 2.$$



I figuren har de fyra första termerna och tillhörande delsummor markerats, samt seriens summa 2, d.v.s. delsummornas gränsvärde: $s_n \to 2$ då $n \to \infty$. ▲

N.4. Exempel. Följande serie är lite speciell i det att termerna i delsummorna tar ut varandra nästan fullständigt (en s.k. teleskopserie):

$$\sum_{k=2}^{\infty} (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) = (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + (\sqrt{4} - \sqrt{3}) + (\sqrt{5} - \sqrt{4}) + \ldots$$

Vi beräknar delsummorna:

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=2}^{n} (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) \\ &= \underbrace{(\sqrt{3} - \sqrt{2})}_{k=2} + \underbrace{(\sqrt{4} - \sqrt{3})}_{k=3} + \underbrace{(\sqrt{5} - \sqrt{4})}_{k=4} + \ldots + \underbrace{(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})}_{k=n-1} + \underbrace{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})}_{k=n} \\ &= \big(\sqrt{3} + \sqrt{4} + \sqrt{5} + \ldots + \sqrt{n} + \sqrt{n+1}\big) - \big(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4} + \ldots + \sqrt{n-1} + \sqrt{n}\big) \\ &= \sqrt{n+1} - \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Eftersom $s_n \to \infty$ då $n \to \infty$ är serien divergent. ▲

N.5. Exempel. Vi vill undersöka serien

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \ldots$$

Här kan man inte hitta något enkelt uttryck för delsummorna, men vi kan i alla fall säga att

$$s_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}}_{n \text{ termer}} = n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

och eftersom $\sqrt{n} \to \infty$ då $n \to \infty$ följer att även $s_n \to \infty$ då $n \to \infty$; således är även denna serie divergent. ▲

N.6. Proposition (Divergenstestet). Om termerna i en serie *inte* går mot 0, så är serien divergent, d.v.s.:

$$a_n \not\to 0 \text{ då } n \to \infty \qquad \Longrightarrow \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ är divergent.}$$

Bevis. Vi gör ett indirekt bevis och antar därför att serien är konvergent, d.v.s. att $s_n \to s$ då $n \to \infty$, där s är ett ändligt tal, och visar att i så fall gäller $a_n \to 0$ då $n \to \infty$. Men detta följer direkt av att $a_n = s_n - s_{n-1} \to s - s = 0$ då $n \to \infty$. ■

N.7. Exempel. Divergenstestet ger omedelbart att serien

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$$

är divergent, ty $\lim_{n\to\infty} (-1)^n$ existerar ej.

Divergenstestet ger också att serien

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos\frac{1}{n} = \cos 1 + \cos\frac{1}{2} + \cos\frac{1}{3} + \ldots$$

är divergent, ty $\cos(1/n) \to 1 \neq 0$ då $n \to \infty$. ▲

Observera att Divergenstestet ensamt inte ger något besked när termerna verkligen går mot noll. Studera serierna

$$(1) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots \qquad \text{och} \qquad (2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots$$

(1) är konvergent enligt Exempel N.3 medan (2) är divergent enligt Exempel N.5, och termerna går mot noll i båda serierna: $1/2^n \to 0$ och $1/\sqrt{n} \to 0$ då $n \to \infty$ (men olika snabbt).

⋆ ÖVNINGAR

⋆ **N.5** Klarar Divergenstestet att visa att serien i Exempel N.4 är divergent?

⋆ **N.6** Beräkna delsummorna till serien $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k(k+2)}$ genom att partialbråksuppdela termerna.

Är serien konvergent, och vad är i så fall dess summa?

⋆ **N.7** Avgör om $\sum_{k=1}^{\infty} \ln\frac{k+1}{k}$ är konvergent genom att beräkna delsummorna.

⋆ **N.8** Beräkna summan av följande serier om de är konvergenta.

(a) $8+2+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\ldots$ (b) $2-\sqrt{2}+1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}-\ldots$ (c) $\sum_{n=3}^{\infty} 4^n$ (d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n - 5\cdot 2^n}{3^n}$

N.2 Positiva serier

Teorin för **positiva serier**, d.v.s. serier $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ där alla $a_n \geq 0$, är särskilt enkel. För dem gäller ju att delsummorna är växande:

$$0 \leq s_1 \leq s_2 \leq s_3 \leq \dots$$

Därmed kan endast två fall inträffa: antingen $s_n \to \infty$, eller också är följden s_n uppåt begränsad, d.v.s. det finns ett tal M sådant att $s_n \leq M$ för alla n. I det förra fallet är alltså serien divergent, och i det senare fallet existerar gränsvärdet $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ ändligt enligt supremumaxiomet, så serien är konvergent (med summa s). Detta tillsammans med Övning N.4 ger därför:

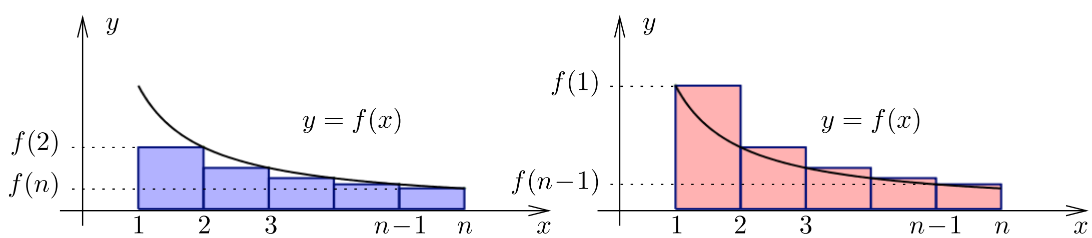
N.8. Sats. En positiv serie är konvergent om och endast om följden av dess delsummor är uppåt begränsad.

Positiva serier $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ beter sig i mångt och mycket som generaliserade integraler $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ som är generaliserade endast i ∞ och har positiv integrand, så mycket i detta avsnitt känns igen från Avsnitt G.2. Först en sats som direkt knyter ihop serier och integraler:

N.9. Sats (Integralkriteriet). Om den kontinuerliga funktionen f är positiv och avtagande på $[1, \infty[$, så är

$$\text{den positiva serien} \quad \sum_{k=1}^{\infty} f(k) \quad \text{och den generaliserade integralen} \quad \int_1^{\infty} f(x)\,dx$$

antingen båda konvergenta eller båda divergenta.



Bevis. Eftersom funktionen f är kontinuerlig på $[1, \infty[$ är den också integrerbar på varje intervall $[1, n]$. Delar vi varje sådant intervall i heltalspunkterna ger uppskattning med under- och översummor (se figur)

$$f(2)\cdot 1 + f(3)\cdot 1 + \dots + f(n)\cdot 1 \overset{(\mathrm{U})}{\leq} \int_1^n f(x)\,dx \overset{(\mathrm{Ö})}{\leq} f(1)\cdot 1 + f(2)\cdot 1 + \dots + f(n-1)\cdot 1,$$

d.v.s.

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) - f(1) \overset{(\mathrm{U})}{\leq} \int_1^n f(x)\,dx \overset{(\mathrm{Ö})}{\leq} \sum_{k=1}^{n} f(k) - f(n). \tag{N.1}$$

Om $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ är konvergent med summa S, så ger olikhet (Ö) att $\int_1^n f(x)\,dx \leq S$ för alla n, och därmed är $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ konvergent enligt supremumaxiomet. Om å andra sidan $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ är konvergent med värde I, så ger olikhet (U) att $\sum_{k=1}^{n} f(k) \leq f(1) + I$ för alla n, och därmed är $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ konvergent enligt Sats N.8.

■

N.10. Exempel. Serien

$$\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n \ln n} = \frac{1}{4 \ln 4} + \frac{1}{5 \ln 5} + \frac{1}{6 \ln 6} + \dots$$

är divergent, ty $f(x) = 1/(x \ln x)$ är positiv och avtagande på $[4, \infty[$ och

$$\int_4^{\infty} \frac{1}{x \ln x}\, dx = \big[\ln \ln x\big]_4^{\infty}$$

existerar ej ändligt. (Se även Exempel N.26.) ▲

N.11. Proposition (Jämförelseserier). Serien $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ är konvergent $\Leftrightarrow$ $\alpha > 1$.

Talet 1 i undre gränsen kan naturligtvis bytas mot vilket annat heltal ≥ 1 som helst.

Bevis. För $\alpha \leq 0$ gäller $1/n^{\alpha} \geq 1$ för alla $n \geq 1$, så serien är divergent enligt Divergenstestet (Proposition N.6). För $\alpha > 0$ är Integralkriteriet (Sats N.9) tillämpligt med $f(x) = 1/x^{\alpha}$, så (G.1) i Proposition G.10 ger påståendet. ■

Fallet $\alpha = 1/2$ behandlades för övrigt redan i Exempel N.5, och den intresserade kan i Övning N.16 se hur man faktiskt kan räkna ut summan i fallet $\alpha = 2$.

För positiva serier finns direkta motsvarigheter till jämförelsekriterierna för integraler (Sats G.11 och Följdsats G.13). Bevisen är också i praktiken desamma, och utelämnas därför.

N.12. Sats (Jämförelsekriteriet). Om $0 \leq a_n \leq b_n$ för alla $n \geq 1$, så gäller

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ är konvergent} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ är konvergent, och } 0 \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n;$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ är divergent} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ är divergent.}$$

N.13. Exempel. Den positiva serien

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{2^n} = \frac{\sin^2 1}{2^1} + \frac{\sin^2 2}{2^2} + \frac{\sin^2 3}{2^3} + \dots$$

är konvergent, ty $0 \leq \dfrac{\sin^2 n}{2^n} \leq \dfrac{1}{2^n}$, och $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ är konvergent. I själva verket får vi uppskattningen

$$0 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{2^n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1,$$

så seriens summa är högst 1. ▲

N.14. Exempel. Vi kan inte avgöra konvergens för den positiva serien

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\ln n}} = \frac{1}{1^{\ln 1}} + \frac{1}{2^{\ln 2}} + \frac{1}{3^{\ln 3}} + \dots$$

genom att direkt använda jämförelseserierna i Proposition N.11, eftersom exponenten α där måste vara konstant. Men vi kan i alla fall säga att

$$0 \le \frac{1}{n^{\ln n}} \le \frac{1}{n^{\ln 3}} \quad \text{då } n \ge 3, \qquad \text{så} \qquad 0 \le \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^{\ln n}} \le \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^{\ln 3}},$$

där den sista serien ovan är konvergent eftersom $\alpha = \ln 3 > 1$. Alltså är $\sum_{n=3}^{\infty} 1/n^{\ln n}$ konvergent enligt Jämförelsekriteriet, och därmed är också $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^{\ln n}$ konvergent. ▲

N.15. Följdsats (Jämförelsekriteriet på kvotform). Om

- $a_n \ge 0$ och $b_n \ge 0$ då $n \ge 1$; och
- $\dfrac{a_n}{b_n} \to A$ då $n \to \infty$, där $0 < A < \infty$,

så är serierna $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ och $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ antingen båda konvergenta eller båda divergenta.

N.16. Exempel. Vi undersöker om

$$\sum_{n=5}^{\infty} (\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-5})$$

är konvergent, och studerar därför termerna:

$$a_n = \sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-5} = \frac{6}{\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2-5}} = \frac{1}{n} \cdot \frac{6}{\sqrt{1+1/n^2} + \sqrt{1-5/n^2}},$$

så med $b_n = \dfrac{1}{n}$ får vi

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{6}{\sqrt{1+1/n^2} + \sqrt{1-5/n^2}} \to \frac{6}{1+1} = 3 = A \quad \text{då } n \to \infty.$$

Eftersom $0 < A < \infty$ och $\sum_{n=5}^{\infty} b_n = \sum_{n=5}^{\infty} 1/n$ är divergent är alltså vår ursprungliga serie också divergent, enligt Jämförelsekriteriet på kvotform. ▲

N.17. Exempel. Är

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \ln\bigl(1 + \frac{1}{n}\bigr) \right)$$

konvergent? Med $t = 1/n$ får vi med Maclaurinutveckling

$$a_n = \frac{1}{n} - \ln\bigl(1 + \frac{1}{n}\bigr) = t - \ln(1+t) = t - \bigl(t - \frac{t^2}{2} + \mathcal{O}(t^3)\bigr) = t^2\bigl(\frac{1}{2} + \mathcal{O}(t)\bigr) = \frac{1}{n^2}\bigl(\frac{1}{2} + \mathcal{O}(\frac{1}{n})\bigr),$$

så med $b_n = 1/n^2$ ser vi att $a_n/b_n \to 1/2 = A$ då $n \to \infty$. Eftersom $0 < A < \infty$ och $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ är konvergent är vår givna serie också konvergent. ▲

⋆ **ÖVNINGAR**

⋆ **N.9** I Övning N.6 och Övning N.7 beräknade vi delsummorna och kunde med hjälp av dem avgöra konvergens. Avgör nu konvergens *utan* att beräkna delsummorna.

⋆ **N.10** Vi ska här se hur långsamt den s.k. harmoniska serien $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$ divergerar.

(a) Visa att

$$\ln n \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \leq 1 + \ln n \qquad \text{då } n = 1, 2, 3, \dots$$

(b) Ungefär hur stor är delsumman i (a) då $n = 10^{10} = 10\,000\,000\,000$? (Använd att $\ln 10 \approx 2{,}30$.)

(c) Ungefär hur många termer behövs för att dubblera summan i (b)?

⋆ **N.11** Visa att (a) $1 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq 2$ (b) $1 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \leq \frac{\alpha}{\alpha - 1}$ om $\alpha > 1$.

⋆ **N.12** Om man nöjer sig med summan av de tio första termerna i serien

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \dots$$

för att approximera seriens summa, visa att approximationsfelet är mindre än $1/200$. Hur många termer räcker det att ta med för att felet ska vara mindre än 10^{-6}?

⋆ **N.13** Avgör om följande serier är konvergenta eller divergenta!

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{1}{n^2}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n^2}$ (c) $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{5^n - 4^n}$ (d) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n+1}{n^2 - 1}$

(e) $\sum_{n=3}^{\infty} (e^{1/n} - 1)$ (f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n}$ (g) $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$ (h) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\arctan n}}$ (j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ (k) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)^{3n}}{(3n)^{2n}}$ (l) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sin \frac{1}{n} - \arctan \frac{1}{n})$

⋆ **N.14** Visa att $\int_0^{\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx$ är divergent, t.ex. genom att först visa att

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx \geq \frac{2}{(n+1)\pi}$$

för alla heltal $n \geq 0$. (Jämför Exempel G.20)

⋆ **N.15** (a) Låt $b_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$. Är $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b_n}$ konvergent?

(b) Samma uppgift för $b_n = \sum_{k=1}^{n} k^\alpha$, allmänt α.

⋆ **N.16** Vi ska med elementära metoder visa att $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{6}$.

(a) Visa att $\dfrac{1}{\sin^2 x} + \dfrac{1}{\sin^2(\pi/2 - x)} = \dfrac{4}{\sin^2 2x}$ närhelst $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$.

(b) Låt M vara ett positivt heltal, och dela intervallet $[0, \pi/2]$ i 2^M lika delar. Låt summan av värdena av funktionen $1/\sin^2 x$ i (de inre) delningspunkterna betecknas med S_M, d.v.s.

$$S_M = \sum_{k=1}^{2^M-1} \frac{1}{\sin^2(\frac{k}{2^M}\cdot\frac{\pi}{2})}.$$

Använd (a) för att lägga ihop termerna i denna summa parvis, symmetriskt kring mittpunkten $\pi/4$, och visa därigenom att

$$\begin{aligned} S_1 &= 2 \\ S_M &= 2 + 4S_{M-1},\ M = 2, 3, \ldots, \end{aligned}$$

och därmed att $S_M = 2(1 + 4 + 4^2 + 4^3 + ... + 4^{M-1}) = \dfrac{2}{3}(4^M - 1),\ M = 1, 2, \ldots$

(c) Genom att använda standardolikheterna $0 < \sin x < x < \tan x$ för $0 < x < \pi/2$, visa att för dessa x gäller $\dfrac{1}{\sin^2 x} - 1 < \dfrac{1}{x^2} < \dfrac{1}{\sin^2 x}$. Summera denna dubbelolikhet i samma delningspunkter som ovan för att erhålla $S_M - (2^M - 1) < \displaystyle\sum_{k=1}^{2^M-1}\frac{1}{(\frac{k}{2^M}\cdot\frac{\pi}{2})^2} < S_M$, och visa med hjälp av detta att $\displaystyle\sum_{k=1}^{2^M-1}\frac{1}{k^2} \to \frac{\pi^2}{6}$ då $M \to \infty$, och därmed att $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

N.3 Absolutkonvergenta serier

Även teorin för **absolutkonvergenta serier**, d.v.s. serier $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ för vilka den positiva serien $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ är konvergent, är enkel tack vare följande sats, som är en direkt motsvarighet till Sats G.18 för integraler. Även beviset är i princip detsamma, och utelämnas därför.

N.18. Sats. Absolutkonvergenta serier är konvergenta, och för dem gäller

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right| \le \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|.$$

N.19. Exempel. $\displaystyle\sum_{n=4}^{\infty}\frac{\sin n}{n^2}$ är absolutkonvergent, ty

$$\sum_{n=4}^{\infty}\left|\frac{\sin n}{n^2}\right| \le \sum_{n=4}^{\infty}\frac{1}{n^2},$$

och den sista serien är konvergent; här har vi använt Jämförelsekriteriet. ▲

N.4 Alternerande serier. Leibnizserier

En serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sägs vara **alternerande** om varannan term är ≥ 0 och varannan är ≤ 0. En alternerande serie där

$$|a_n| \searrow 0, \quad \text{d.v.s.} \quad |a_1| \geq |a_2| \geq |a_3| \geq \ldots \text{ och } |a_n| \to 0$$

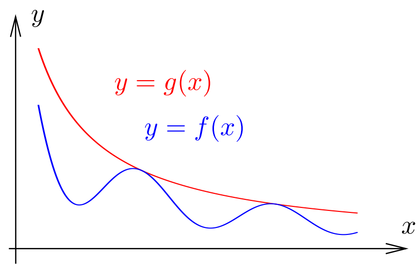
(utläses: $|a_n|$ avtar mot noll), sägs vara en **Leibnizserie**.

Observera att $\searrow$ (avta mot) säger mer än bara $\to$ (gå mot). I figuren intill illustreras positiva funktioner som är sådana att

$$g(x) \searrow 0 \text{ då } x \to \infty$$

och

$$f(x) \to 0 \text{ då } x \to \infty \quad \text{men} \quad f(x) \not\searrow 0 \text{ då } x \to \infty.$$



N.20. Exempel. Serien

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$$

kan sägas vara urtypen för en Leibnizserie: alla termer med udda nummer är positiva, alla med jämna nummer är negativa, och $|a_n| = 1/n \searrow 0$ då $n \to \infty$.

För att undersöka serien närmare bildar vi delsummorna med jämna respektive udda index:

$$\begin{aligned} s_{2n} &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right) \\ s_{2n+1} &= 1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) - \ldots - \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1}\right) \end{aligned}$$

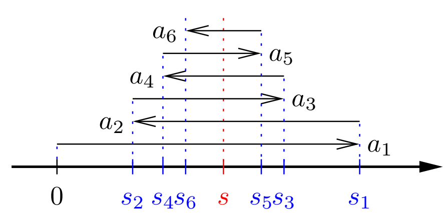
Vi ser att uttrycken inom parentes alltid är positiva, så följden $s_2, s_4, s_6, \ldots$ är växande och följden $s_1, s_3, s_5, \ldots$ är avtagande samtidigt som

$$s_{2n+1} - s_{2n} = \frac{1}{2n+1}. \tag{N.2}$$

Med andra ord,

$$0 \leq s_2 \leq s_4 \leq s_6 \leq \ldots \leq s_{2n} \leq s_{2n+1} \leq \ldots \leq s_5 \leq s_3 \leq s_1 = 1,$$

så s_{2n} är växande och uppåt begränsad medan s_{2n+1} är avtagande och nedåt begränsad, varför $\lim_{n\to\infty} s_{2n}$ och $\lim_{n\to\infty} s_{2n+1}$ existerar ändligt. Men enligt (N.2) är gränsvärdena lika, så i själva verket existerar seriens summa $s = \lim_{n\to\infty} s_n$ som ett ändligt tal, och $s_{2n} \nearrow s$ och $s_{2n+1} \searrow s$. För s gäller alltså $s_{2m} \leq s \leq s_{2n+1}$ för alla heltal m och n, vilket ger, först med $m = n$,



$$0 \leq s - s_{2n} \leq s_{2n+1} - s_{2n} = \frac{1}{2n+1},$$

och sedan med $m = n + 1$,

$$0 \geq s - s_{2n+1} \geq s_{2n+2} - s_{2n+1} = -\frac{1}{2n+2},$$

vilket medför att, för allmänt n,

$$|s - s_n| \leq \frac{1}{n+1}.$$

Om man vill beräkna seriens summa med ett fel av högst 1/100, säg, räcker det alltså om man tar med 99 termer,

$$|s - s_{99}| = \left| s - \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{99}\right)\right| \leq \frac{1}{100},$$

och direkt uträkning ger $s_{99} \approx 0{,}698$.

I själva verket är $s = \ln 2$ (se Exempel P.15), men eftersom vi måste ta med många termer för att komma nära s är ovanstående serie dålig vid numerisk beräkning av detta tal. Exempel P.10 och Övning P.21 tar upp bättre sätt att beräkna $\ln 2$. ▲

Resonemanget i Exempel N.20 kan med små ändringar överföras till allmänna Leibnizserier:

N.21. Sats (Leibniz kriterium). Leibnizserier $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ är konvergenta, och för summan s gäller

$$|s - s_n| \leq |a_{n+1}| \tag{N.3}$$

för alla n, där $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$.

Det är viktigt att $|a_n| \searrow 0$; att $|a_n| \to 0$ räcker inte, vilket Övning N.20 illustrerar. Det är också viktigt att förstå att uppskattningen (N.3) bygger på att vi har just en Leibnizserie. Se också figuren ovan (”Leibniz julgran”)!

N.22. Exempel. Serien

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(2n+1)}$$

är alternerande, och eftersom $n!(2n+1) \nearrow \infty$ har vi en Leibnizserie, som alltså är konvergent. Hur långt ska vi summera för att få ett fel i summan s av högst 10^{-3}, säg? Enligt (N.3) ser vi att det räcker med att titta på termernas storlek, och eftersom redan

$$|a_5| = \frac{1}{5!(2 \cdot 5 + 1)} = \frac{1}{120 \cdot 11} \leq 10^{-3}$$

så är

$$s \approx s_4 = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \frac{1}{216}$$

med fel

$$|s - s_4| \leq |a_5| \leq 10^{-3}.$$

▲

N.23. Exempel. Vi undersöker om den alternerande serien

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$$

är konvergent. Den är i alla fall inte absolutkonvergent, ty

$$|a_n| = \frac{\ln n}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \text{då } n \geq 3,$$

och $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ är divergent. Om vi sätter

$$f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$$

får vi $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ och

$$f'(x) = \frac{2 - \ln x}{2x^{3/2}} < 0 \quad \text{då } x > e^2,$$

alltså med säkerhet då $x > 9$. Sammantaget är f positiv och (strängt) avtagande mot noll åtminstone på $[9, \infty[$, så

$$|a_n| = f(n) \searrow 0 \qquad \text{då} \quad 9 \le n \to \infty.$$

Leibniz kriterium ger att $\sum_{n=9}^{\infty} a_n$ konvergerar, alltså även $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. ▲

⋆ ÖVNINGAR

⋆ N.17 Approximera summan av serien i Exempel N.22 med ett fel av högst 10^{-10}.

⋆ N.18 Om man nöjer sig med summan av de tio första termerna i serien

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} = -1 + \frac{1}{2^3} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} - \frac{1}{5^3} + \dots$$

för att approximera seriens summa, visa att felet är mindre än 10^{-3}. Hur många termer räcker det att ta med för att felet i summan ska vara mindre än 10^{-6}? (Jämför Övning N.12.)

⋆ N.19 Är följande serier absolutkonvergenta? Om inte, är de ändå konvergenta?

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{-\sqrt{n}}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n - 4\sqrt{n} + 5}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1-n}{1+n}\right)^n$ (e) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos\frac{n\pi}{2}}{\ln n}$

⋆ N.20 Låt

$$a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}, \quad n \ge 1.$$

Visa att $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ är alternerande och att $|a_n| \to 0$, men att serien är divergent. Är detta förenligt med Leibniz kriterium?

N.5 Något om seriers konvergens- och divergenshastigheter

Ibland vill man veta inte bara *att* en serie konvergerar eller divergerar, utan också *hur snabbt* det sker, inte minst när man utvecklar numeriska metoder.Vi fick i Övning N.10 en uppfattning om hur långsamt serien $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ divergerar, och vi ska nu se på några ytterligare fall av både snabbt och långsamt beteende.

N.24. Exempel. (Exponentiellt snabb konvergens och divergens) Vi studerar den geometriska serien

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots$$

För $|q| < 1$ är ju serien konvergent, och en svansberäkning ger

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} q^n = q^{N+1} \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{q^{N+1}}{1-q}, \quad |q| < 1,$$

så svansens belopp avtar exponentiellt i N för given kvot q, vilket är snabbt.

För $|q| > 1$ växer beloppet av termerna, $|q|^n$, exponentiellt i n för given kvot q, så serien divergerar snabbt.

▲

N.25. Exempel. (Långsam konvergens) I Övning N.13 såg vi att den positiva serien

$$\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$$

är konvergent, och en svansuppskattning (jämför översumman i Sats N.9) ger

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n} \geq \int_{N+1}^{\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x} = \left[-\frac{1}{\ln x}\right]_{N+1}^{\infty} = \frac{1}{\ln(N+1)},$$

så

$$\frac{1}{\ln(N+1)} > \epsilon \text{ (d.v.s. } N < -1 + \exp(1/\epsilon)) \implies \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n} > \epsilon.$$

Med t.ex. $\epsilon = 1/100$ ser vi att med färre än $-1 + \exp 100 \approx 10^{43}$ termer (ett mycket stort antal termer) för att approximera seriens summa är felet (svansen) fortfarande större än $1/100$. Vår serie konvergerar alltså mycket långsamt. ▲

N.26. Exempel. (Långsam divergens) I Exempel N.10 visade vi att den positiva serien

$$\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$$

är divergent, d.v.s. – eftersom serien är positiv – att $\displaystyle\sum_{n=4}^{N} \frac{1}{n \ln n} \to \infty$ då $N \to \infty$. Men hur snabbt sker detta? En integraluppskattning (jämför undersumman i Sats N.9) ger

$$\sum_{n=4}^{N} \frac{1}{n \ln n} \leq \int_{3}^{N} \frac{dx}{x \ln x} = \left[\ln \ln x\right]_{3}^{N} = \ln \ln N - \ln \ln 3 < \ln \ln N,$$

så

$$\ln \ln N < M \text{ (d.v.s. } N < \exp \exp M) \implies \sum_{n=4}^{N} \frac{1}{n \ln n} < M.$$

Med t.ex. $M = 10$ får man att med färre än $\exp \exp 10 \approx 10^{9566}$ termer (ett närmast ofattbart stort tal) når delsumman inte ens upp till 10. Vår serie divergerar alltså oerhört långsamt. ▲

P Potensserier

Med en **potensserie** menar vi en serie av typen

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \dots$$

där x är en variabel och $c_0, c_1, c_2, \dots$ är givna konstanter (oberoende av x), s.k. **koefficienter**. För varje enskilt värde på x får vi en numerisk serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots$, där $a_n = c_n x^n$.

P.1 Konvergens av potensserier

För att hitta var en potensserie konvergerar behöver vi först ett resultat där man jämför numeriska serier med geometriska serier.

P.1. Proposition (Jämförelse med geometrisk serie). Låt $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ vara en numerisk serie. Om

$$Q = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \qquad (\textbf{rotkriteriet})$$

eller

$$Q = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \qquad (\textbf{kvotkriteriet})$$

existerar, $0 \le Q \le \infty$, så gäller:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad \text{är} \quad \begin{cases} \text{absolutkonvergent om } Q < 1 \text{ (inklusive fallet } Q = 0\text{)}, \\ \text{divergent om } Q > 1 \text{ (inklusive fallet } Q = \infty\text{)}. \end{cases}$$

(Kriterierna ger inte besked ifall $Q = 1$, se exempel nedan.)

Bevis. Vi bevisar rotkriteriet, och lämnar kvotkriteriet som Övning P.4. Antag alltså att $Q = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ existerar, $0 \le Q \le \infty$.

Om $Q < 1$ kan vi välja ett (något större) tal q sådant att $Q < q < 1$, och till detta q finns ett heltal N sådant att

$$\sqrt[n]{|a_n|} \le q, \quad \text{d.v.s.} \quad |a_n| \le q^n, \quad \text{för alla } n \ge N.$$

Men då är

$$\sum_{n=N}^{\infty} |a_n| \le \sum_{n=N}^{\infty} q^n = \{\text{geometrisk serie med kvot } q,\ 0 < q < 1\} = \frac{q^N}{1-q},$$

och därmed är den positiva serien $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ konvergent enligt Jämförelsekriteriet (Sats N.12).

Om å andra sidan $Q > 1$ kan vi välja ett (något mindre) tal q sådant att $1 < q < Q$, och till detta q finns ett heltal N sådant att

$$\sqrt[n]{|a_n|} \ge q, \quad \text{d.v.s.} \quad |a_n| \ge q^n, \quad \text{för alla } n \ge N. \tag{P.1}$$

Men eftersom $q > 1$ går inte $|a_n|$, och därmed inte heller a_n, mot noll (följden $\{a_n\}_{n=N}^{\infty}$ är t.o.m. obegränsad), så serien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ är divergent enligt Divergenstestet (Proposition N.6). ■

För numeriska serier är kvot- och rotkriterierna synnerligen grova: om $Q < 1$ går termerna exponentiellt snabbt mot noll (vilket är snabbt), och om $Q > 1$ blir termerna exponentiellt snabbt obegränsat stora*.

Om $Q = 1$ ger dessa kriterier inget besked. Detta är fallet bl.a. om termerna är av typen $a_n = p(n)/q(n)$, där p och q är polynom skilda från nollpolynomet; t.ex. är ju $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ divergent medan $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ är konvergent.

P.2. Exempel. För att undersöka om den positiva serien

$$\sum_{n=7}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} 2^{-n}$$

är konvergent kan vi använda rotkriteriet:

$$\sqrt[n]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} 2^{-n}} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n} = \frac{1}{2}\exp\left(\frac{\ln(1 + \frac{1}{n})}{\frac{1}{n}}\right) \to \frac{\exp 1}{2} = \frac{e}{2} > 1 \quad \text{då } n \to \infty,$$

så serien är divergent; termerna går t.o.m. mot oändligheten exponentiellt snabbt. ▲

Kriteriernas användbarhet är främst i samband med potensserier, som vi nu ska se.

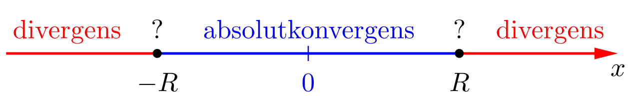
P.3. Sats (Existens av konvergensradie). Till varje potensserie

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \ldots$$

hör ett entydigt bestämt R, $0 \le R \le \infty$, kallat **konvergensradie**, sådant att

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \text{ är } \begin{cases} \text{absolutkonvergent om } |x| < R, \\ \text{divergent om } |x| > R. \end{cases}$$

Fallet då $0 < R < \infty$ illustreras till höger. Notera att satsen inte ger besked för $|x| = R$, d.v.s. för $x = \pm R$.



Ifall $R = 0$ konvergerar potensserien precis då $x = 0$ (alla potensserier konvergerar i $x = 0$, ty där är de $= c_0$), medan potensserien konvergerar för alla reella x ifall $R = \infty$.

Variabeln x skulle mycket väl kunna vara komplex, därav namnet konvergens*radie*.

Bevis av Sats P.3. Att konvergensradien R är entydigt bestämd är klart, ty om $R_1 < R_2$ vore två olika R vore potensserien både konvergent och divergent då $R_1 < |x| < R_2$, vilket är orimligt.

Vi ska först visa specialfallet att om $G = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$ existerar, så finns R med de önskade egenskaperna. Fixera därför $x \neq 0$ (om $x = 0$ är potensserien som sagt trivialt konvergent), och sätt $a_n = c_n x^n$. Vi får

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{|c_n x^n|} = |x| \sqrt[n]{|c_n|} \to \begin{cases} 0, & G = 0, \\ |x|G, & 0 < G < \infty, \\ \infty, & G = \infty, \end{cases} \qquad \text{då } n \to \infty \text{ och } x \neq 0,$$

så rotkriteriet ger genast konvergens om $G = 0$, divergens om $G = \infty$, och för övriga G får vi att

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \text{ är } \begin{cases} \text{absolutkonvergent om } |x|G < 1, \text{d.v.s. om } |x| < 1/G, \\ \text{divergent om } |x|G > 1, \text{d.v.s. om } |x| > 1/G, \end{cases}$$

*Om $Q = 0$ (eller $Q = \infty$) går termernas belopp ännu snabbare, s.k. hyperexponentiellt, mot noll (oändligheten) så $R = 1/G$ uppfyller villkoren i satsen (med tolkningen $1/0 = \infty$ och $1/\infty = 0$ just här).

För att bevisa existensen av R i det allmänna fallet konstaterar vi först att vårt resonemang i beviset av Proposition P.1 kan genomföras oförändrat om vi i (P.1) endast kräver att olikheten $\sqrt[n]{|a_n|} \geq q$ ska gälla för oändligt många $n \geq N$ (till skillnad från alla $n \geq N$). Detta är samma sak som att säga att $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = Q$ (till skillnad från $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = Q$), där lim sup, *limes superior*, *övre gränsvärdet*, är det största möjliga gränsvärdet av någon delföljd av den aktuella följden. Detta gränsvärde existerar alltid, och med $G = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$ är $R = 1/G$, alltid, vilket då bevisar existensen av R. ■

Observera alltså att satsen inte säger något om konvergensen i ändpunkterna $x = \pm R$ då $0 < R < \infty$. I själva verket kan allt hända, se Exempel P.4 nedan. I tillämpningarna är de reella randpunkterna $x = \pm R$ sällan av intresse, men om man ändå vill veta exakt för vilka reella x en potensserie konvergerar, som i Övning P.3, måste de två numeriska serier man får då $x = \pm R$ undersökas separat, med metoder från Kapitel N. (I komplex analys kan däremot det samlade beteendet över hela randcirkeln vara intressant.)

För att beräkna konvergensradien använder man normalt rot- eller kvotkriteriet som i nedanstående båda exempel.

P.4. Exempel. De tre potensserierna

$$s_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n, \quad s_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \quad \text{och} \quad s_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$$

har alla konvergensradie $R = 1$, vilket kan ses med rotkriteriet: med

$$a_n = \frac{x^n}{n^\alpha}$$

för $\alpha = 0$, 1 eller 2 får vi för fixt $x \neq 0$

$$\sqrt[n]{\left|\frac{x^n}{n^\alpha}\right|} = |x| \cdot n^{-\alpha/n} = |x| \exp\left(\frac{-\alpha \ln n}{n}\right) \to |x| \cdot e^0 = |x| = Q \qquad \text{då } n \to \infty.$$

Alltså är serierna absolutkonvergenta för $|x| < 1$ och divergenta för $|x| > 1$. Om $x = \pm 1$ inträffar olika saker: serie s_0 är divergent i båda punkterna; serie s_2 är (absolut)konvergent i båda; medan serie s_1 är divergent i $x = 1$ men konvergent – dock ej absolutkonvergent – i $x = -1$. ▲

P.5. Exempel. För att bestämma konvergensradien för potensserien

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(2n)!} x^{3n} = \frac{1^2 x^3}{2!} + \frac{2^2 x^6}{4!} + \frac{3^2 x^9}{6!} + \frac{4^2 x^{12}}{8!} + \dots$$

kan vi använda kvotkriteriet med

$$a_n = \frac{n^2}{(2n)!} x^{3n}$$

för fixt $x \neq 0$:

$$\begin{aligned} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \frac{(n+1)^2 (2n)!}{n^2 (2(n+1))!} \cdot \frac{|x|^{3(n+1)}}{|x|^{3n}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \frac{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2n}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2n \cdot (2n+1) \cdot (2n+2)} |x|^3 \\ &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \frac{|x|^3}{(2n+1)(2n+2)} \to 0 = Q \quad \text{då } n \to \infty, \end{aligned}$$

oavsett $x \neq 0$, så potensserien konvergerar för alla x, d.v.s. $R = \infty$. ▲

Att multiplicera och/eller dividera en potensseries koefficienter med polynom påverkar inte konvergensradien, vilket beror på att $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|p(n)|} = 1$ för alla polynom p (utom nollpolynomet). Vi preciserar:

P.6. Proposition. Om p och q är polynom skilda från nollpolynomet, och $q(n) \neq 0$ för alla $n = 0, 1, 2, \ldots$, så har potensserierna $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ och $\sum_{n=0}^{\infty} \big(p(n)/q(n)\big) c_n x^n$ samma konvergensradie.

Speciellt har alla potensserier av formen $\sum_{n=0}^{\infty} \big(p(n)/q(n)\big) x^n$ konvergensradie 1.

⋆ ÖVNINGAR

⋆ **P.1** Kan rot- eller kvotkriteriet användas för att avgöra om följande serier är konvergenta? Om inte, avgör konvergens på annat sätt!

(a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{n/2}}{n^7}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n^2$ (d) $\displaystyle\sum_{n=8}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$

⋆ **P.2** Bestäm konvergensradien för följande potensserier:

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2 x^n}{2^n}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n!\, x^n$ (d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{3^n + n^3}$ (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2} x^{3n+1}$

⋆ **P.3** För vilka reella x konvergerar följande serier?

(a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n} x^n$ (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} e^{n^2} x^n$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{2^n n^2}$ (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{x}{n})^{2n}$ (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + (-1)^n n}{n^2} x^{5n}$

⋆ **P.4** (a) Ge exempel på en serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ för vilken $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ existerar men inte $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$.

(b) Visa att om $Q = \displaystyle\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ existerar, $0 \leq Q \leq \infty$, så är också $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = Q$.

P.2 Termvis derivering och integrering av potensserier

Vi har nu kommit till det som gör potensserier riktigt användbara:

P.7. Sats (Termvis derivering och integrering). Antag att

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \ldots$$

har konvergensradie $R > 0$. Då är f kontinuerlig och deriverbar i $]-R, R[$, och

$$f'(x) = \sum_{\substack{n=1 \\ \text{(eller } n=0)}}^{\infty} c_n n x^{n-1} = (\ 0 + \ )\ c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + \ldots$$

och

$$\int_0^x f(t)\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} x^{n+1} = c_0 x + \frac{c_1 x^2}{2} + \frac{c_2 x^3}{3} + \frac{c_3 x^4}{4} + \ldots,$$

båda då $|x| < R$. Potensserierna för derivatan och integralen har också konvergensradie R.

Notera att det inte spelar någon roll om serien för $f'(x)$ börjar i $n = 1$ eller i $n = 0$, eftersom termen med nummer noll, alltså derivatan av konstanten c_0, ändå är 0.

För att visa denna centrala sats behöver vi en teknisk hjälpsats.

P.8. Hjälpsats. Om $|a| \le r$ och $|x| \le r$, så gäller

$$|x^n - a^n| \le nr^{n-1}|x - a|, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{P.2}$$

Om dessutom $x \ne a$, så gäller också

$$\left| \frac{x^n - a^n}{x - a} - na^{n-1} \right| \le \frac{n(n-1)}{2} r^{n-2}|x - a|, \quad n = 2, 3, \ldots \tag{P.3}$$

Bevis. Beviset bygger på identiteten

$$x^n - a^n = (x - a)(x^{n-1} + x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 + \ldots + x^2a^{n-3} + xa^{n-2} + a^{n-1}) \tag{P.4}$$

som inses genom direkt utveckling av högerledet. Eftersom det finns precis n termer i den högra parentesen och alla termer där har belopp högst r^{n-1} får vi

$$|x^n - a^n| \le |x - a|(|x|^{n-1} + |x|^{n-2}|a| + \ldots + |x||a|^{n-2} + |a|^{n-1}) \le |x - a| \cdot nr^{n-1},$$

och därmed är (P.2) bevisad.

Använder vi sedan (P.4) då $x \ne a$ och (P.2) upprepade gånger får vi

$$\begin{aligned}
\left| \frac{x^n - a^n}{x - a} - na^{n-1} \right| &= \left| x^{n-1} + x^{n-2}a + \ldots + xa^{n-2} + a^{n-1} - na^{n-1} \right| \\
&= |(x^{n-1} - a^{n-1}) + (x^{n-2} - a^{n-2})a + \ldots + (x - a)a^{n-2}| \\
&\le |x^{n-1} - a^{n-1}| + |x^{n-2} - a^{n-2}||a| + \ldots + |x - a||a|^{n-2} \\
&\le |x - a| \cdot (n-1)r^{n-2} + |x - a| \cdot (n-2)r^{n-3}r + \ldots + |x - a|r^{n-2} \\
&= |x - a|((n-1) + (n-2) + \ldots + 1)r^{n-2} = \{\text{aritmetisk summa}\} \\
&= |x - a|\frac{n(n-1)}{2}r^{n-2},
\end{aligned}$$

och därmed är beviset av (P.3) klart. ■

Bevis av Sats P.7. Proposition P.6 medför att potensserierna $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c_n n x^{n-1}$ och $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} x^{n+1}$ också har konvergensradie R.

Fixera a med $|a| < R$. Välj sedan r så att $|a| < r < R$; då ger Proposition P.6 att serierna $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n| n r^{n-1}$ och $\sum_{n=2}^{\infty} |c_n| n(n-1) r^{n-2}/2$ är konvergenta. Om $|x| < r$ får vi enligt Hjälpsats P.8

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(a)| &= \left| \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} c_n a^n \right| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} c_n (x^n - a^n) \right| \le \sum_{n=1}^{\infty} |c_n||x^n - a^n| \\
&\le |x - a| \sum_{n=1}^{\infty} |c_n| n r^{n-1},
\end{aligned}$$

där den sista serien konvergerar, och dess summa är oberoende av x. Alltså får vi att $f(x) \to f(a)$ då $x \to a$, så f är kontinuerlig i a.

Om $|x| < r$ och $x \ne a$ får vi också, återigen från Hjälpsats P.8,

$$\begin{aligned}
\left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - \sum_{n=1}^{\infty} c_n n a^{n-1} \right| &= \left| \sum_{n=2}^{\infty} c_n \left(\frac{x^n - a^n}{x - a} - na^{n-1} \right) \right| \le \sum_{n=2}^{\infty} |c_n| \left| \frac{x^n - a^n}{x - a} - na^{n-1} \right| \\
&\le |x - a| \sum_{n=2}^{\infty} |c_n| \frac{n(n-1)}{2} r^{n-2},
\end{aligned}$$

där den sista serien, som är oberoende av x, konvergerar, så

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n a^{n-1}.$$

Beviset för termvis integrering lämnas som Övning P.5. ■

Genom att använda termvis derivering upprepade gånger, och sedan sätta $x = 0$, får vi

P.9. Följdsats. Om $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ har konvergensradie $R > 0$, så har f kontinuerliga derivator av alla ordningar i $|x| < R$, och

$$c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Speciellt är potensseriens koefficienter entydigt bestämda av potensseriens summa.

P.10. Exempel. Den geometriska seriens summa beräknade vi i Proposition N.2 på sidan 12:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots = \frac{1}{1-x}, \qquad |x| < 1.$$

Vi ska nu se vilka serier vi får när vi dels deriverar, dels integrerar denna serie, och sedan ska vi använda dessa serier för att beräkna några konkreta numeriska seriers summor.

Termvis derivering ger

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{(1-x)^2}, \qquad |x| < 1.$$

Om vi nu multiplicerar denna likhet med x får vi

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^n = x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \ldots = \frac{x}{(1-x)^2}, \qquad |x| < 1,$$

och t.ex. får vi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n} = \frac{1}{3^1} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \frac{4}{3^4} + \ldots = \Big/ x = \frac{1}{3}, \ \left|\frac{1}{3}\right| < 1 \Big/ = \frac{1/3}{(1-1/3)^2} = \frac{3}{4}.$$

Termvis integrering av den geometriska serien ger

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \ldots = \int_0^x \frac{1}{1-t}\, dt = -\ln(1-x), \qquad |x| < 1.$$

Om vi här låter $x = 1/2$, t.ex. (observera att $|1/2| < 1$), får vi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n 2^n} = \Big/ \text{Byt index: } n = k+1 \Big/ = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1/2)^{k+1}}{k+1} = -\ln(1 - \frac{1}{2}) = \ln 2.$$

Om vi sedan, som en approximation till $\ln 2$, tar de tio första termerna, säg, i den senaste serien får vi

$$\ln 2 \approx \sum_{n=1}^{10} \frac{1}{n 2^n} = \frac{1}{1 \cdot 2^1} + \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \ldots + \frac{1}{10 \cdot 2^{10}},$$

där felet i approximationen, svansen $\displaystyle\sum_{n=11}^{\infty}\frac{1}{n2^n}=\frac{1}{11\cdot 2^{11}}+\frac{1}{12\cdot 2^{12}}+\frac{1}{13\cdot 2^{13}}+\ldots$, kan uppskattas t.ex. så här:

$$0<\sum_{n=11}^{\infty}\frac{1}{n2^n}\le\frac{1}{11}\sum_{n=11}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\{\text{geometrisk serie}\}=\frac{1}{11\cdot 2^{11}}\cdot\frac{1}{1-1/2}=\frac{1}{11\cdot 2^{10}}<10^{-4}.$$

Av detta inser vi att $\ln 2\approx 0{,}693$ med tre korrekta decimaler. (Se även Övning P.21.) ▲

⋆ **ÖVNINGAR**

⋆ **P.5** Bevisa den del av Sats P.7 som handlar om termvis integrering genom att använda resultatet för termvis derivering.

⋆ **P.6** Härled potensserien för $\ln(1+x)$ genom att integrera potensserien för dess derivata.

⋆ **P.7** Härled potensserien för $\arctan x$.

⋆ **P.8** Utgå från den geometriska serien (som i Exempel P.10) för att beräkna

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}nx^n$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n2^n$ (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$ (e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4^n(n+1)}$ (f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n(n+2)}$

⋆ **P.9** Visa att potensserien

$$y=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}+\frac{x^8}{8!}+\ldots$$

konvergerar för alla x och löser differentialekvationen $y''=y$ med villkoren $y(0)=1$, $y'(0)=0$. Använd detta för att beräkna potensseriens summa.

⋆ **P.10** Beräkna summan av följande potensserier: (a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n}}{(4n)!}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}$

⋆ **P.11** Skriv potensserien

$$x+\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{9}+\frac{x^4}{16}+\ldots$$

som en integral.

P.3 Potensserielösningar till differentialekvationer

Differentialekvationer av typen

$$y^{(n)}(x)+f_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x)+\ldots+f_2(x)y''(x)+f_1(x)y'(x)+f_0(x)y(x)=h(x),$$

där koefficientfunktionerna $f_0,\ldots,f_{n-1}$ och högerledet h är tillräckligt snälla[†], kan lösas med potensserieansats. Det skulle leda oss för långt att visa detta, men vi ska i alla fall se hur det går till i några exempel.

P.11. Exempel. Ett sätt att härleda potensserien för exponentialfunktionen e^x är att utnyttja att denna funktion är den entydiga lösningen till differentialekvationen

$$y'=y,\quad y(0)=1.$$

[†]Det räcker att de är analytiska i en cirkelskiva runt origo (se någon kurs i komplex analys)

Ansätt därför $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$. Innanför (den ännu okända) konvergensradien R gäller

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} = \Big/ \text{Numrera om: byt } n \text{ mot } n+1 \Big/ = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) c_{n+1} x^n,$$

så entydighet hos koefficienterna (Följdsats P.9) ger

$$y' = y \qquad \Leftrightarrow \qquad (n+1)c_{n+1} = c_n \quad \text{för alla } n \geq 0,$$

och eftersom $c_0 = y(0) = 1$ får vi successivt

$$c_0 = 1, \quad c_1 = \frac{c_0}{1} = \frac{1}{1}, \quad c_2 = \frac{c_1}{2} = \frac{1}{1 \cdot 2}, \quad c_3 = \frac{c_2}{3} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3}, \quad \ldots, \quad c_n = \frac{c_{n-1}}{n} = \frac{1}{n!}.$$

Alltså blir $y = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, och konvergensradien $R = \infty$, ty kvotkriteriet ger för varje fixt $x \neq 0$

$$\left| \frac{x^{n+1}/(n+1)!}{x^n/n!} \right| = \frac{|x|}{n+1} \to 0$$

då $n \to \infty$. Den termvisa deriveringen är alltså tillåten för alla x, och därmed har vi visat att

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots \qquad \text{för alla } x.$$

▲

P.12. Exempel. Vi ansätter en potensserielösning $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ till differentialekvationen

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0, \quad y(0) = 1, \; y'(0) = 2,$$

och får alltså innanför (den ännu okända) konvergensradien R

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} \qquad \text{och} \qquad y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2},$$

och därför

$$\begin{aligned}
(1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y &= (1 - x^2) \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2} - 2x \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} + 2 \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2} - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^n - 2 \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^n + 2 \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \\
&\overset{*}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \left((n+2)(n+1) c_{n+2} - n(n-1) c_n - 2n c_n + 2 c_n \right) x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \Big((n+2)(n+1) c_{n+2} - (n^2 + n - 2) c_n \Big) x^n \\
&= 0, \qquad |x| < R,
\end{aligned}$$

där vi i steg * har bytt summationsindex från n till $n + 2$ i den första serien så att vi även där får x^n; observera också att summorna $\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^n$ och $\sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^n$ lika gärna kan börja i $n = 0$, eftersom de extra termerna ändå är 0.

Vår potensserie löser alltså differentialekvationen då $|x| < R$ precis då alla koefficienter är 0, och detta tillsammans med begynnelsevillkoren ger

$$\begin{aligned}
(n+2)(n+1) c_{n+2} - (n^2 + n - 2) c_n &= 0 \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, \\
c_0 = y(0) &= 1, \\
c_1 = y'(0) &= 2,
\end{aligned}$$

d.v.s.
$$c_{n+2} = \frac{n^2+n-2}{(n+2)(n+1)}c_n = \frac{(n+2)(n-1)}{(n+2)(n+1)}c_n = \frac{n-1}{n+1}c_n, \quad n = 0,1,2,\ldots,$$
samt $c_0 = 1$ och $c_1 = 2$. Vi får således för jämna index
$$c_2 = \frac{-1}{1}c_0 = -1, \quad c_4 = \frac{1}{3}c_2 = -\frac{1}{3}, \quad c_6 = \frac{3}{5}c_4 = -\frac{1}{5}, \quad \ldots, \quad c_{2k} = -\frac{1}{2k-1},\ k = 0,1,2,\ldots,$$
och för udda index
$$c_3 = \frac{0}{2}c_1 = 0, \quad \text{därmed } c_3 = c_5 = c_7 = \ldots = 0.$$
Sammantaget får vi alltså
$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 1 + 2x - x^2 - \frac{x^4}{3} - \frac{x^6}{5} - \frac{x^8}{7} - \ldots = 1 + 2x - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k}}{2k-1}, \qquad |x| < R.$$
För att bestämma konvergensradien är det ofta bra att i dessa sammanhang använda kvotkriteriet. För fixt $x \neq 0$ sätter vi
$$a_k = \frac{x^{2k}}{2k-1}$$
och får
$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \left|\frac{x^{2k+2}/(2k+1)}{x^{2k}/(2k-1)}\right| = |x|^2 \left|\frac{2-1/k}{2+1/k}\right| \to |x|^2, \qquad k \to \infty,$$
så vi har konvergens då $|x|^2 < 1$ och divergens då $|x|^2 > 1$. Alltså är $R = \sqrt{1} = 1$, så i intervallet $|x| < 1$ är ovanstående räkningar giltiga, och därmed är vår potensserie en lösning till differentialekvationen i detta intervall. ▲

⋆ ÖVNINGAR

⋆ **P.12** Härled potensserien för $\sin x$ genom att använda att denna funktion är den entydiga lösningen till
$$y'' + y = 0, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$$
Härled sedan potensserien för $\cos x$. Konvergensradier?

⋆ **P.13** Sök en potensserielösning $y(x)$ till differentialekvationen
$$(1-x)y' = 2y, \quad y(0) = 1.$$
Konvergensradie? Kan du beräkna seriens summa, t.ex. genom att lösa ekvationen på annat sätt?

⋆ **P.14** Härled potensserien för $(1+x)^{\alpha}$ genom att lösa differentialekvationen
$$(1+x)y' = \alpha y, \quad y(0) = 1.$$
Som alltid ska konvergensradien bestämmas.

⋆ **P.15** Lös differentialekvationen
$$(1-4x^2)y'' = y, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 0,$$
med lämplig potensserieansats. Var är potensserien en lösning?

⋆ **P.16** Bestäm en potensserie som löser differentialekvationen
$$y'' + 2xy' + y = 0, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$$
Räkna speciellt ut koefficienterna $c_0, \ldots, c_7$.

P.4 Elementära funktioners potensserier (Maclaurinserier)

I föregående avsnitt härleddes nedanstående serier i exempel eller i övningar. Alla dessa serier är helt enkelt de vanliga Maclaurinutvecklingarna utsträckta i oändlighet. Vi sammanfattar:

Om $|x| < R$ och, för den sista serien nedan, $\alpha \notin \{0, 1, 2, \ldots\}$, gäller följande:

$$\begin{aligned}
e^x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} &&= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} + \ldots, && R = \infty,\\
\cos x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} &&= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots, && R = \infty,\\
\sin x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} &&= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots, && R = \infty,\\
\arctan x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} &&= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots, && R = 1,\\
\ln(1+x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n} &&= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^7}{7} - \ldots, && R = 1,\\
(1+x)^\alpha &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n &&= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1\cdot 2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \ldots, && R = 1.
\end{aligned}$$

Om $\alpha \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ är $(1+x)^\alpha$ ett polynom och serien ovan har endast ändligt många termer, och tillhörande $R = \infty$.

Beträffande ändpunkterna $x = \pm 1$ för de tre sista utvecklingarna kan följande sägas:

- Likheten för $\arctan x$ gäller även då $x = \pm 1$ (jämför Övning P.23).
- Likheten för $\ln(1+x)$ gäller även då $x = 1$ (se Exempel P.15) medan serien är divergent för $x = -1$.
- Likheten för $(1+x)^\alpha$ då $\alpha \notin \mathbb{N}$ är lite svårare att analysera, men man kan visa följande:
  - När $\alpha > 0$ gäller den även då $x = \pm 1$.
  - När $-1 < \alpha < 0$ gäller den även då $x = 1$ medan serien är divergent då $x = -1$.
  - När $\alpha \leq -1$ är serien divergent då $x = \pm 1$.

Då $|x| > 1$ är de tre sista potensserierna alltid divergenta, så där är likheterna bokstavligen meningslösa även i punkter där funktionerna till vänster är definierade.

P.13. Exempel. Eftersom utvecklingen för e^x konvergerar överallt får vi

$$e = e^1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \ldots$$

Om vi som en approximation till talet e nöjer oss med $e \approx \sum_{n=0}^{8} 1/n!$ gör vi felet $\sum_{n=9}^{\infty} 1/n!$, och

$$\begin{aligned}
0 < \sum_{n=9}^{\infty} \frac{1}{n!} &= \frac{1}{9!} + \frac{1}{10!} + \frac{1}{11!} + \frac{1}{12!} + \ldots = \frac{1}{9!}\left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10\cdot 11} + \frac{1}{10\cdot 11\cdot 12} + \ldots\right)\\
&< \frac{1}{9!}\left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \ldots\right) = \{\text{geometrisk serie}\} = \frac{10}{9\cdot 9!} < 10^{-5}.
\end{aligned}$$

▲

P.14. Exempel. Med $-x^2$ i stället för x i exponentialutvecklingen, som ju har oändlig konvergensradie, får vi (där * anger termvis integrering)

$$I = \int_0^1 e^{-x^2}\,dx = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!}\,dx \overset{*}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!(2n+1)}\right]_0^1$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(2n+1)}.$$

Denna Leibnizserie studerades i Exempel N.22, och där såg vi att

$$I \approx \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \frac{1}{216}$$

med fel mindre än 10^{-3}. ▲

P.15. Exempel. Maclaurinserien för $\ln(1+x)$ är en Leibnizserie då $0 < x < 1$, och feluppskattningen för sådana serier, (N.3) på sidan 20, ger därför

$$\left|\ln(1+x) - \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}\right)\right| \le \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad 0 < x < 1,\ n = 1, 2, 3, \ldots$$

Om vi här låter $x \to 1^-$ för fixt n får vi med instängningsregeln för gränsvärden och kontinuitet att

$$\left|\ln 2 - \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\right)\right| \le \frac{1}{n+1}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Låter vi nu $n \to \infty$ i denna senare olikhet får vi

$$\ln 2 = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots,$$

och det avslutande påståendet i Exempel N.20 är därmed bevisat. (Se också Övning P.21.) ▲

⋆ ÖVNINGAR

⋆ **P.17** Sätt formellt in ix i stället för x i Maclaurinserien för exponentialfunktionen och tag real- och imaginärdelar. Känns resultatet bekant?

⋆ **P.18** Beräkna $\arctan(1/3)$ med ett fel av högst 10^{-4}.

⋆ **P.19** (a) Generalisera Exempel P.13 till

$$0 < e - \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} < \frac{N+2}{(N+1)\cdot(N+1)!} \le \frac{1}{N \cdot N!}, \quad N = 1, 2, 3, \ldots$$

(b) Vi kan nu visa att e är irrationellt: Antag motsatsen, d.v.s. att $e = p/q$ för positiva heltal p och q, och sätt

$$H = q!\left(e - \sum_{n=0}^{q} \frac{1}{n!}\right).$$

Då är H ett heltal, och $0 < H < 1/q$ – motsägelse!

⋆ **P.20** Skriv

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx$$

som en serie, och approximera sedan integralen med ett fel av högst 10^{-4}.

⋆ **P.21** (a) Skriv $\ln 2$ som en positiv serie genom att välja x lämpligt i Maclaurinserien för

$$\ln \frac{1+x}{1-x}.$$

(b) Uppskatta felet om vi approximerar $\ln 2$ med summan av de tre första termerna i serien.

⋆ **P.22** (a) Härled Maclaurinserien för $\arcsin x$. Konvergensradie?

(b) Använd (a) för att uttrycka talet π som en positiv serie och beräkna de första termerna i denna serie.

(c) Hur många termer behövs i serien i (b) för att beräkna π med ett fel av högst 10^{-8}?

⋆ **P.23** Använd tekniken i Exempel P.15 för att visa att

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots = \frac{\pi}{4}.$$

⋆ **P.24** Antag att $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ är konvergent. Visa att i så fall gäller

$$\lim_{x \to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n.$$

(Obs! Ej trivialt!)

Svar till övningar

G.2 (a) Divergent (b) $\pi/12$ (c) 0 (d) 1 (e) Divergent (f) Divergent

(g) 4 (h) $2\ln 2 - 2$ (i) π (j) $\ln 2$ (k) Divergent (l) π

G.3 (b) Den första integralen är konvergent med värde $\ln 2$ medan den andra är divergent

G.4 Ja, den måste vara divergent (använd Proposition G.9)

G.7 $0 \leq I \leq \dfrac{1}{2e}$ respektive $0 \leq I \leq \dfrac{1}{e}$. Den första ger bäst instängning.

G.8 (a) Konvergent (b) Divergent (c) Konvergent (d) Divergent
(e) Konvergent (f) Konvergent (g) Divergent (h) Konvergent
(i) Divergent (j) Konvergent (k) Konvergent (l) Konvergent

G.10 $c = 2$ ger $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{4x + x^3}} \leq 2\sqrt{2}$

G.11 (b) $n!$

G.13 (a) Ja (b) Nej

G.14 0

N.5 Nej, termerna går mot 0.

N.6 $s_n = \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n+2}$. Seriens summa är $\dfrac{3}{2}$.

N.7 $s_n = \ln(n+1)$, så serien är divergent.

N.8 (a) $\dfrac{32}{3}$ (b) $4 - 2\sqrt{2}$ (c) Divergent (d) $-\dfrac{57}{4}$

N.10 (b) ca 23,5 (c) ca $10^{20} = 100\,000\,000\,000\,000\,000\,000$ termer

N.12 708 termer räcker ($\sqrt{500\,000} < 708$)

N.13 (a) Divergent (b) Konvergent (c) Konvergent (d) Divergent
(e) Divergent (f) Konvergent (g) Konvergent (h) Konvergent
(i) Konvergent (j) Konvergent (k) Divergent (l) Konvergent

N.15 (a) Nej (b) Konvergent $\Leftrightarrow \alpha > 0$

N.17 $s \approx \displaystyle\sum_{n=0}^{11} \frac{(-1)^n}{n!(2n+1)}$ med abs(fel) $\leq \dfrac{1}{12! \cdot (2 \cdot 12 + 1)} \leq 10^{-10}$

N.18 100 termer räcker

N.19 (a) Konv., ej abs.konv. (b) Abs.konv. (c) Konv., ej abs.konv. (d) Div. (e) Konv., ej abs.konv.

N.20 Ja, ty $|a_n|$ *avtar inte* mot noll (visa det!)

P.1 (a) Ja, konvergent (b) Ja, divergent (c) Nej, divergent (d) Nej, konvergent

P.2 (a) ∞ (b) 2 (c) 0 (d) $\sqrt{3}$ (e) $e^{1/3}$

P.3 (a) $-1 \le x < 1$ (b) $x = 0$ (c) $-4 \le x \le 0$ (d) alla x (e) $-1 < x \le 1$

P.6 Se avsnitt P.4 på sidan 32

P.8 (a) $\dfrac{x}{(1-x)^2}$ då $|x| < 1$, divergent då $|x| \ge 1$

(b) 2 (c) divergent ($= \infty$) (d) 6 (e) $4 \ln \dfrac{4}{3}$ (f) $36 \ln \dfrac{3}{2} - \dfrac{57}{4}$

P.9 $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$, $R = \infty$

P.10 (a) $\dfrac{\cosh x + \cos x}{2}$, $R = \infty$ (b) $\dfrac{1}{3} e^x + \dfrac{2}{3} e^{-x/2} \cos \dfrac{x\sqrt{3}}{2}$, $R = \infty$

P.11 $\displaystyle\int_0^x \frac{-\ln(1-t)}{t}\, dt$, $R = 1$

P.13 $y = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n = \frac{1}{(1-x)^2}$, $R = 1$

P.15 $y = 1 + \dfrac{x^2}{2} + \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3^2 \cdot 7^2 \cdot \ldots \cdot (4n-5)^2}{(2n)!} x^{2n}$, $|x| < \dfrac{1}{2}$

P.16 $y = 1 + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot \ldots \cdot (4n-3)}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} - \frac{x^6}{16} + \ldots$, $R = \infty$

P.17 $e^{ix} = \cos x + i \sin x$

P.18 $\arctan \dfrac{1}{3} \approx \dfrac{1}{1 \cdot 3^1} - \dfrac{1}{3 \cdot 3^3} + \dfrac{1}{5 \cdot 3^5}$ med fel högst $\dfrac{1}{7 \cdot 3^7} = \dfrac{1}{15309} \le 10^{-4}$ (Leibnizserie)

P.20 $\dfrac{1}{1 \cdot 1!} - \dfrac{1}{3 \cdot 3!} + \dfrac{1}{5 \cdot 5!} - \dfrac{1}{7 \cdot 7!} + \ldots \approx \dfrac{1}{1 \cdot 1!} - \dfrac{1}{3 \cdot 3!} + \dfrac{1}{5 \cdot 5!}$ med fel högst $\dfrac{1}{7 \cdot 7!} \le 10^{-4}$ (Leibnizserie)

P.21 (a) $\ln 2 = \dfrac{2}{1 \cdot 3^1} + \dfrac{2}{3 \cdot 3^3} + \dfrac{2}{5 \cdot 3^5} + \dfrac{2}{7 \cdot 3^7} + \ldots = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{(2n+1) \cdot 3 \cdot 9^n}$

(b) $\ln 2 \approx \dfrac{842}{1215}$ med fel $< \dfrac{2}{7 \cdot 3^7} \cdot \dfrac{1}{1 - 1/9} < 1{,}5 \cdot 10^{-4}$ (jämför uppskattningen i Exempel P.10)

P.22 (a) $\arcsin x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2}}{n! \cdot (2n+1)} x^{2n+1}$, $R = 1$

(b) $\pi = 3 + 3 \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2}}{n! \cdot (2n+1) \cdot 4^n} = 3 + \frac{1}{8} + \frac{9}{640} + \frac{15}{7168} + \ldots$

(c) 11 termer räcker