L Lagranges restterm (Fö 3)

För att kunna uppskatta hur stort approximationsfelet vid Maclaurinutveckling verkligen är, i absoluta tal, måste resttermen (d.v.s. feltermen) skrivas i Lagranges form. När den skrivs i den svagare ordo-formen, $\mathcal{O}(x^{n+1})$, utnyttjar vi endast dess storleksordning jämfört med andra x-potenser; t.ex. är både $1000x^7 = \mathcal{O}(x^7)$ och $-0{,}001x^7 = \mathcal{O}(x^7)$, men beloppet av den förra är ju 1 000 000 gånger större än beloppet av den senare.

L.1. Sats (Maclaurinutveckling med restterm i Lagranges form). Antag att f har $n+1$ kontinuerliga derivator i ett öppet intervall I som innehåller punkten 0. Då gäller följande: Till varje $x \in I$ finns något $\xi = \xi(x)$ mellan 0 och x sådant att

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

Bevis. Vi ska bevisa satsen m.h.a. upprepad partiell integration.

Fixera $x \in I$. Notera först att $\int_0^x f'(t)\,dt = f(x) - f(0)$, och att därför

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + \int_0^x 1 \cdot f'(t)\,dt \overset{*}{=} f(0) + \big[(t-x)f'(t)\big]_{t=0}^{t=x} - \int_0^x (t-x)f''(t)\,dt \\ &= f(0) + f'(0)x + \int_0^x (x-t)f''(t)\,dt, \end{aligned}$$

där vi i steg $*$ har valt $t - x = -(x-t)$ som (en något ovanlig) primitiv funktion till 1 m.a.p. t; notera att x är fixt och att t är integrationsvariabeln. Genom att välja $-(x-t)^k/k!$ som primitiv till $(x-t)^{k-1}/(k-1)!$ m.a.p. t när $k \geq 1$ får vi allmänt – med partiell integration – att

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{(x-t)^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k)}(t)\,dt &= \left[-\frac{(x-t)^k}{k!} f^{(k)}(t)\right]_{t=0}^{t=x} - \int_0^x \left(-\frac{(x-t)^k}{k!}\right) f^{(k+1)}(t)\,dt \\ &= \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(t)\,dt, \qquad k = 1, 2, \ldots, n. \end{aligned}$$

Således är

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + f'(0)x + \int_0^x (x-t)f''(t)\,dt = \{\ k = 2\ \} \\ &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2!} f'''(t)\,dt = \{\text{ upprepa för } k = 3, \ldots, n\} \\ &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt. \end{aligned}$$

Eftersom $(x-t)^n/n!$ inte byter tecken i integrationsintervallet och $f^{(n+1)}$ är kontinuerlig där, kan vi använda integralkalkylens generaliserade medelvärdessats i steg $**$ nedan (se Forsling-Neymark sats 6.6) och få att det finns något ξ mellan 0 och x sådant att

$$\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt \overset{**}{=} f^{(n+1)}(\xi) \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\,dt = f^{(n+1)}(\xi) \left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\right]_{t=0}^{t=x} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1},$$

och beviset är klart. ■

L.2. Exempel (Approximation av ett funktionsvärde). Vi ska bestämma Maclaurinutvecklingen för

$$f(x) = \ln(1 + x)$$

av ordning 2, och sedan använda denna för att finna en approximation till talet $\ln(9/10)$.

Vår funktion f är oändligt deriverbar i intervallet $]-1, \infty[$, så Sats L.1 ovan ger genast att det till varje $x > -1$ finns något tal $\xi = \xi(x)$ mellan 0 och x sådant att

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(\xi)}{3!}x^3.$$

Direkt uträkning av derivatorna ger att

$$f(x) = \ln(1 + x), \quad f'(x) = (1 + x)^{-1}, \quad f''(x) = -(1 + x)^{-2} \quad \text{och} \quad f'''(x) = 2(1 + x)^{-3},$$

så

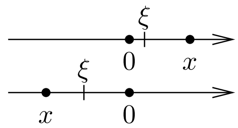
$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 1, \quad f''(0) = -1 \quad \text{och} \quad f'''(\xi) = 2(1 + \xi)^{-3}.$$

Maclaurinutvecklingen av ordning 2 för $\ln(1 + x)$ blir därför

$$(*) \qquad \ln(1 + x) = 0 + 1 \cdot x + \frac{(-1)}{2!}x^2 + \frac{2(1 + \xi)^{-3}}{3!}x^3 = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3(1 + \xi)^3}.$$

Det enda satsen säger om talet $\xi = \xi(x)$ är att det ligger någonstans mellan 0 och x – vi vet alltså inte exakt var det befinner sig. Det vi med säkerhet kan säga om ξ är endast att

$$\begin{cases} 0 \le \xi \le x & \text{ifall } x \ge 0, \\ x \le \xi \le 0 & \text{ifall } x \le 0, \end{cases}$$



och det är därför vi skriver $\boldsymbol{\xi}$ **mellan 0 och** $\boldsymbol{x}$, vilket ju täcker in båda fallen.

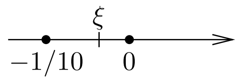
Vi ska nu använda utvecklingen $(*)$ ovan för att approximera talet $\ln(9/10)$ med ett bråktal, och dessutom uppskatta felet i approximationen. Om vi stoppar in $x = -1/10$ i $(*)$ får vi att

$$\underbrace{\ln\frac{9}{10}}_{\text{Exakt värde}} = \underbrace{(-1/10) - \frac{(-1/10)^2}{2}}_{\text{Approximation}} + \underbrace{\frac{(-1/10)^3}{3(1 + \xi)^3}}_{\text{Approximationsfel}} = -\frac{21}{200} - \frac{1}{3000(1 + \xi)^3},$$

d.v.s. att

$$\ln\frac{9}{10} \approx -\frac{21}{200} \quad (= -0{,}105), \qquad \text{med fel} \quad -\frac{1}{3000(1 + \xi)^3},$$

där det enda vi vet om talet ξ är att det befinner sig någonstans mellan 0 och $-1/10$. Vi uppskattar nu absolutbeloppet av felet:



$$|\text{felet}| = \frac{1}{3000(1 + \xi)^3} \overset{*}{\le} \frac{1}{3000(9/10)^3} = \frac{1}{3 \cdot 9^3} = \frac{1}{3 \cdot 729} < \frac{1}{2000} \quad (= 0{,}000\,5),$$

där steg $*$ beror på att $\xi \ge -1/10$ och att därmed $(1 + \xi)^3 \ge (9/10)^3$ och $1/(1 + \xi)^3 \le 1/(9/10)^3$; en kvot mellan positiva tal blir ju *större* om nämnaren görs *mindre*. Även om vi fortfarande inte vet vad det exakta approximationsfelet är har vi i alla fall lyckats bevisa att absolutbeloppet av detta fel är mindre än $1/2000$ (och därmed också att $\ln(9/10) \approx -0{,}105$ korrekt avrundat). ▲

L.3. Exempel (Approximation av en funktion på ett helt intervall). Vi ska här approximera exponentialfunktionen

$$f(x) = e^x$$

med ett polynom på intervallet $[-1, 1]$.

Eftersom

$$f(x) = e^x, \quad f'(x) = e^x, \quad \ldots, \quad f^{(k)}(x) = e^x, \quad \ldots$$

blir Maclaurinutvecklingen för e^x av en allmän ordning n helt enkelt

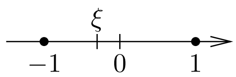
$$\begin{aligned}\underbrace{e^x}_{\text{Exakt värde}} &= f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1} \\ &= \underbrace{1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}}_{\text{Approximation, } p_n(x)} + \underbrace{\frac{e^\xi}{(n+1)!}x^{n+1}}_{\text{Approximationsfel}}\end{aligned}$$

för något $\xi = \xi(x)$ mellan 0 och x; här är $p_n(x)$ Maclaurinpolynomet för e^x av ordning n.

Av utvecklingen ovan får vi nu följande uppskattning av approximationsfelets belopp:

$$\left|e^x - p_n(x)\right| = \left|\frac{e^\xi}{(n+1)!}x^{n+1}\right| = \frac{e^\xi}{(n+1)!}|x|^{n+1} \overset{*}{\leq} \frac{e^1}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}, \qquad |x| \leq 1;$$

att steg $*$ är sant beror på att $\xi = \xi(x)$, som ju ligger mellan 0 och x för varje enskilt $x \in [-1, 1]$, måste uppfylla att $-1 \leq \xi \leq 1$, och på att exponentialfunktionen är växande så att med säkerhet $e^\xi \leq e^1$; den kända olikheten $e < 3$ används sedan i nästa steg.



Med t.ex. $n = 9$ får vi att

$$\left|e^x - p_9(x)\right| = \left|e^x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^9}{9!}\right)\right| < \frac{3}{10!} = \frac{3}{3\,628\,800} < 10^{-6}, \qquad |x| \leq 1,$$

så felet i approximationen $e^x \approx p_9(x)$ är alltså mindre än 10^{-6} till belopp för alla x i intervallet $-1 \leq x \leq 1$. Specialfallet $x = 1$ ger oss en approximation till talet e:

$$e = e^1 \approx p_9(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{9!} \quad (= 2{,}718\,281\,5\ldots),$$

med ett fel vars absolutbelopp är mindre än 10^{-6} $(= 0{,}000\,001)$. ▲

L.4. Exempel (Approximation av en integral). Vi ska approximera integralen

$$\int_0^{1/2} \sin(x^2)\,dx$$

med ett rationellt tal sådant att absolutbeloppet av approximationsfelet blir mindre än 10^{-6}, till att börja med.

Vi börjar med att Maclaurinutveckla $f(t) = \sin t$. Upprepad derivering ger att

$$\begin{array}{llll} f(t) = \sin t, & f'(t) = \cos t, & f''(t) = -\sin t, & f'''(t) = -\cos t, \\ f^{(4)}(t) = \sin t, & f^{(5)}(t) = \cos t, & f^{(6)}(t) = -\sin t, & f^{(7)}(t) = -\cos t, \end{array}$$

med periodisk fortsättning. Om vi utvecklar t.o.m. grad 4 i t, säg, får vi därför att

$$\begin{aligned}\sin t = f(t) &= f(0) + f'(0)t + \frac{f''(0)}{2!}t^2 + \frac{f'''(0)}{3!}t^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}t^4 + \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}t^5 \\ &= t - \frac{t^3}{6} + \frac{\cos\xi}{120}t^5\end{aligned}$$

för något $\xi = \xi(t)$ mellan 0 och t; om denna längd på utvecklingen ger tillräckligt bra approximation upptäcker vi inom kort, vid feluppskattningen. Sätter vi här $t = x^2$ får vi alltså att

$$(*) \qquad \sin(x^2) = x^2 - \frac{x^6}{6} + \frac{\cos\xi(x)}{120}x^{10}$$

för något $\xi = \xi(x)$ mellan 0 och x^2. (Eftersom $x^2 \geq 0$ kan vi faktiskt skriva $0 \leq \xi \leq x^2$ i just detta fall om vi vill.)

Nu integrerar vi $(*)$ och får då att

$$\underbrace{\int_0^{1/2} \sin(x^2)\,dx}_{\text{Exakt värde}} = \underbrace{\int_0^{1/2} \left(x^2 - \frac{x^6}{6}\right) dx}_{\text{Approximation}} + \underbrace{\int_0^{1/2} \frac{\cos\xi(x)}{120} x^{10}\,dx}_{\text{Approximationsfel}}$$
$$= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{6\cdot 7}\right]_0^{1/2} + \text{felet} = \frac{1}{2^3\cdot 3} - \frac{1}{2^7\cdot 6\cdot 7} + \text{felet}$$
$$= \frac{223}{5376} + \text{felet}.$$

När vi uppskattar absolutbeloppet av felet kan vi använda att $|\cos\xi| \le 1$ för alla $\xi \in \mathbf{R}$, speciellt för $\xi = \xi(x)$ ovan, och vi får därför att

$$|\text{felet}| = \left|\int_0^{1/2} \frac{\cos\xi(x)}{120} x^{10}\,dx\right| \overset{*}{\le} \int_0^{1/2} \left|\frac{\cos\xi(x)}{120} x^{10}\right| dx = \int_0^{1/2} \frac{|\cos\xi(x)|}{120} |x|^{10}\,dx$$
$$\le \int_0^{1/2} \frac{x^{10}}{120}\,dx = \left[\frac{x^{11}}{120\cdot 11}\right]_0^{1/2} = \frac{1}{2^{11}\cdot 120\cdot 11} = \frac{1}{2048\cdot 120\cdot 11} < 10^{-6},$$

där vi i steg $*$ använder en känd räknelag för integraler, se Forsling-Neymark sats 6.2 (d). Observera att vi inte på något enkelt sätt kan hitta – och inte heller behövde hitta – någon primitiv funktion till $(\cos\xi(x))x^{10}/120$ eller $|\cos\xi(x)|x^{10}/120$ eftersom vi ju inte vet hur $\xi = \xi(x)$ beror på x.

Sammanfattningsvis har vi alltså bevisat att

$$\int_0^{1/2} \sin(x^2)\,dx \approx \frac{223}{5376} \quad (= 0{,}041\,480\,6\ldots)$$

med ett fel vars absolutbelopp är mindre än 10^{-6} $(= 0{,}000\,001)$, så vår längd på utvecklingen var tydligen tillräcklig.

Om vi däremot hade velat ha en rationell approximation till integralen med ett fel vars belopp är mindre än 10^{-7}, säg, så ser vi att feluppskattningen ovan inte räcker till. Det kan vi råda bot på genom att gå tillbaka och utveckla lite längre. Vi prövar med ordning 6 i t (notera att $5! = 120$ och $7! = 5040$):

$$\sin t = t - \frac{t^3}{6} + \frac{t^5}{120} - \frac{\cos\xi}{5040} t^7.$$

Precis som ovan får vi nu att

$$\underbrace{\int_0^{1/2} \sin(x^2)\,dx}_{\text{Exakt värde}} = \underbrace{\int_0^{1/2} \left(x^2 - \frac{x^6}{6} + \frac{x^{10}}{120}\right) dx}_{\text{Ny approximation}} + \underbrace{\int_0^{1/2} \frac{-\cos\xi(x)}{5040} x^{14}\,dx}_{\text{Nytt approximationsfel}}$$
$$= \frac{1}{2^3\cdot 3} - \frac{1}{2^7\cdot 6\cdot 7} + \frac{1}{2^{11}\cdot 120\cdot 11} + \text{felet},$$

där nu

$$|\text{felet}| = \left|\int_0^{1/2} \frac{-\cos\xi(x)}{5040} x^{14}\,dx\right| \le \int_0^{1/2} \frac{x^{14}}{5040}\,dx = \frac{1}{2^{15}\cdot 5040\cdot 15} = \frac{1}{32768\cdot 5040\cdot 15} < 10^{-9},$$

vilket t.o.m. är mycket bättre än vad som efterfrågades $(< 10^{-7})$.

Sammanfattningsvis har vi alltså nu bevisat att

$$\int_0^{1/2} \sin(x^2)\,dx \approx \frac{1}{2^3\cdot 3} - \frac{1}{2^7\cdot 6\cdot 7} + \frac{1}{2^{11}\cdot 120\cdot 11} \quad (= 0{,}041\,481\,024\,6\ldots)$$

med ett fel vars absolutbelopp är mindre än 10^{-9} $(= 0{,}000\,000\,001)$. ▲

Lars Alexandersson, 10 januari 2018