

D Existens och entydighet för differentialekvationer av ordning 1

D.1. Sats. Om f och f'_y är kontinuerliga på rektangeln R som ges av $|x - x_0| \leq \alpha$, $|y - y_0| \leq \beta$, där $\alpha > 0$ och $\beta > 0$, så finns det ett δ , $0 < \delta \leq \alpha$, sådant att differentialekvationen

$$y'(x) = f(x, y(x)), \quad y(x_0) = y_0,$$

har en entydigt bestämd $\mathcal{C}^1$ -lösning $y(x)$ definierad då $|x - x_0| < \delta$.

Bevis. Vi kan utan inskränkning anta att $x_0 = 0$ och $y_0 = 0$. (Sätt annars $\xi = x - x_0$, $\eta = y - y_0$ och $\varphi(\xi, \eta) = f(\xi + x_0, \eta + y_0)$; då blir differentialekvationen $\eta'(\xi) = \varphi(\xi, \eta(\xi))$, $\eta(0) = 0$, där φ och φ'_η är kontinuerliga på rektangeln $|\xi| \leq \alpha$, $|\eta| \leq \beta$.)

Eftersom f och f'_y är kontinuerliga på den kompakta mängden R existerar $M = \max_R |f|$ och $L = \max_R |f'_y|$. Notera först, för senare behov, att

$$|f(x, \tilde{y}) - f(x, y)| = \left| \int_y^{\tilde{y}} f'_y(x, t) dt \right| \leq L|\tilde{y} - y|, \quad (x, \tilde{y}) \in R, (x, y) \in R. \quad (\text{D.1})$$

Låt vidare $\delta = \min(\alpha, \beta/M)$ och $I_\delta = [-\delta, \delta]$ (om $M = 0$ sätter vi $\delta = \alpha$, men då är $f = 0$ och problemet har den enda lösningen $y = 0$), och sätt $\|g\| = \max_{I_\delta} |g|$ för funktioner $g \in \mathcal{C}(I_\delta)$.

Definiera funktionsföljden $y_0, y_1, y_2, \dots$ rekursivt via

$$y_0(x) = 0 \quad \text{och} \quad (*) \quad y_{n+1}(x) = \int_0^x f(t, y_n(t)) dt, \quad n \in \mathbb{N}, \quad x \in I_\delta.$$

Då följer det att $y_n \in \mathcal{C}(I_\delta)$ och $\|y_n\| \leq \beta$ för alla $n \in \mathbb{N}$, vilket inses med induktion: $y_0 = 0$, så $y_0 \in \mathcal{C}(I_\delta)$ och $\|y_0\| = 0 \leq \beta$, och om $y_n \in \mathcal{C}(I_\delta)$ och $\|y_n\| \leq \beta$ för något $n \in \mathbb{N}$ är

$$|y_{n+1}(x)| = \left| \int_0^x f(t, y_n(t)) dt \right| \leq M|x| \leq M\delta \leq \beta, \quad x \in I_\delta,$$

så även $\|y_{n+1}\| \leq \beta$, och eftersom f är kontinuerlig på R ser vi i (*) att $y_{n+1} \in \mathcal{C}(I_\delta)$.

Låt nu R_δ vara den eventuellt mindre rektangeln $|x| \leq \delta$, $|y| \leq \beta$; graferna till alla y_n i följen ligger således i R_δ , och vi ska visa att gränsfunktionen $y(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x)$, $x \in I_\delta$, existerar och är deriverbar, och löser vårt problem. Till att börja med visar vi olikheten

$$|y_{n+1}(x) - y_n(x)| \leq ML^n \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad x \in I_\delta. \quad (\text{D.2})$$

Olikheten är trivialt sann för $n = 0$ (ty $|y_1(x) - y_0(x)| = |y_1(x)| \leq M|x|$ enligt ovan), och om den är sann för ett givet $n \in \mathbb{N}$ får vi att

$$\begin{aligned} |y_{n+2}(x) - y_{n+1}(x)| &= \left| \int_0^x (f(t, y_{n+1}(t)) - f(t, y_n(t))) dt \right| \leq \text{sgn}(x) \int_0^x L |y_{n+1}(t) - y_n(t)| dt \\ &\leq \text{sgn}(x) \int_0^x ML^{n+1} \frac{|t|^{n+1}}{(n+1)!} dt = ML^{n+1} \frac{|x|^{n+2}}{(n+2)!}, \quad x \in I_\delta, \end{aligned}$$

där sgn är teckenfunktionen, och även detta påstående följer således med induktion.

Låt nu

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (y_{n+1}(x) - y_n(x)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} (y_{k+1}(x) - y_k(x)) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x), \quad x \in I_\delta,$$

(minns att $y_0(x) = 0$). Serien som definierar $y(x)$ är absolut och likformigt konvergent på I_δ , ty

$$\sum_{n=0}^{\infty} |y_{n+1}(x) - y_n(x)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} M L^n \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{M}{L} (e^{L|x|} - 1) \leq \frac{M}{L} (e^{L\delta} - 1), \quad x \in I_\delta,$$

(om $L = 0$ är $f(x, y) = f(x)$ på R och $y(x) = y_1(x) = F(x)$, där $F(x)$ är den primitiv till $f(x)$ för vilken $F(0) = 0$). y är därför en kontinuerlig funktion på I_δ (se t.ex. Sats A.9 i kompendiet TATA77 Fourieranalys) och $\|y - y_n\| \leq \sum_{k=n}^{\infty} \|y_{k+1} - y_k\| \rightarrow 0$ då $n \rightarrow \infty$, eftersom denna serie är svans till den konvergenta serien $\sum_{k=0}^{\infty} \|y_{k+1} - y_k\|$. Genom att låta $n \rightarrow \infty$ i (*) får vi att

$$(**) \quad y(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_{n+1}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^x f(t, y_n(t)) dt = \int_0^x f(t, y(t)) dt, \quad x \in I_\delta,$$

där det sista steget beror på att

$$\left| \int_0^x (f(t, y_n(t)) - f(t, y(t))) dt \right| \leq L \|y_n - y\| |x| \leq L \|y_n - y\| \delta \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Integralekvationen (**) för y är ekvivalent med att $y'(x) = f(x, y(x))$ och $y(0) = 0$; speciellt är $y(x)$ en $\mathcal{C}^1$ -funktion som löser vår differentialekvation i intervallet $|x| < \delta$, och gränsövergång i $\|y_n\| \leq \beta$ ger $\|y\| \leq \beta$. Existensen av en lösning är därmed klar.

Det återstår att bevisa entydigheten. Antag därför att $\tilde{y}$ är en annan $\mathcal{C}^1$ -lösning i någon rektangel $|x| < \tilde{\delta}$, $|y| \leq \beta$. Sätt $d = \min(\delta, \tilde{\delta})$. Då är

$$|\tilde{y}(x) - y(x)| = \left| \int_0^x (f(t, \tilde{y}(t)) - f(t, y(t))) dt \right| \leq L \operatorname{sgn}(x) \int_0^x |\tilde{y}(t) - y(t)| dt, \quad |x| < d.$$

Låt $z(x)$ vara integralen i högerledet. Då är $z(x) \geq 0$ då $0 \leq x < d$ och $z(x) \leq 0$ då $-d < x \leq 0$. Dessutom är vänsterledet $= z'(x)$, och funktionen z uppfyller alltså olikheten

$$z'(x) \leq L \operatorname{sgn}(x) z(x), \quad |x| < d.$$

Om $x \geq 0$ får vi med integrerande faktor att

$$z'(x) - Lz(x) \leq 0 \Rightarrow (e^{-Lx} z(x))' \leq 0 \Rightarrow e^{-Lx} z(x) \text{ är avtagande på } [0, d],$$

så $0 \leq e^{-Lx} z(x) \leq e^{-L0} z(0) = 0$ och därmed är $z(x) = 0$ då $0 \leq x < d$. Om $x \leq 0$ blir i stället $e^{Lx} z(x)$ avtagande på $]-d, 0]$, så $0 \geq e^{Lx} z(x) \geq e^{L0} z(0) = 0$ och därmed är $z(x) = 0$ då $-d < x \leq 0$. Således är $|\tilde{y}(x) - y(x)| = z'(x) = 0$, d.v.s. $\tilde{y}(x) = y(x)$, för alla x då $|x| < d$. ■

D.2. Anmärkning. Kravet att f'_y ska vara kontinuerlig på rektangeln R kan mildras något. Som framgår av beviset räcker det att det finns ett L sådant att

$$|f(x, \tilde{y}) - f(x, y)| \leq L |\tilde{y} - y|$$

för alla $(x, \tilde{y}) \in R$ och $(x, y) \in R$; man säger att f uppfyller ett *Lipschitzvillkor*, och detta krav är alltså automatiskt uppfyllt ifall $|f'_y| \leq L$ på R , se (D.1). Exempelvis tillåts $f(x, y) = |y|$, trots att f'_y inte existerar då $y = 0$, eftersom $||\tilde{y}| - |y|| \leq |\tilde{y} - y|$. Tack vare entydigheten följer det därför direkt att differentialekvationen $y' = |y|$, $y(0) = 0$, har enda lösningen $y = 0$.

Om R är en hel remsa $|x| \leq \alpha$, $y \in \mathbb{R}$, kommer graferna till alla y_n automatiskt att ligga i remsan. Vi kan då sätta $M = \max_{|x| \leq \alpha} |f(x, 0)|$ och $\delta = \alpha$, och om f uppfyller ett Lipschitzvillkor i remsan följer olikheten (D.2) och lösningen y blir definierad i hela intervallet $|x| < \alpha$.

Om man endast kräver att f ska vara kontinuerlig på rektangeln (eller remsan) R kan man fortfarande visa – med mera avancerade metoder – att differentialekvationen har en lösning, men den behöver då inte vara entydigt bestämd, se t.ex. Andersson-Böiers, *Ordinära differentialekvationer*, Studentlitteratur. Exempelvis har differentialekvationen $y' = 3\sqrt[3]{y^2}$, $y(0) = 0$, som inte uppfyller ett Lipschitzvillkor i någon enda rektangel kring origo, andra lösningar än den triviala $y = 0$, t.ex. $y = x^3$, och andra lösningar kan man få med skarvning, t.ex. $y = 0$ då $x \leq a$ och $y = (x - a)^3$ då $x \geq a$, där $a \geq 0$ är en konstant. ▲