Numeriska serier

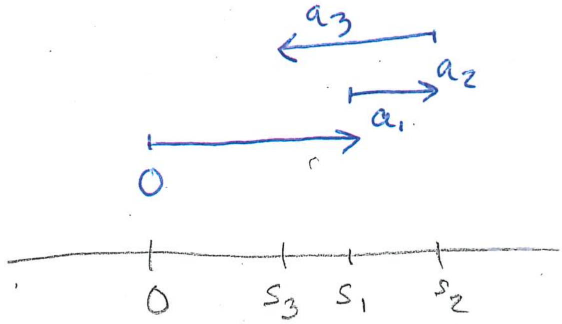
Allmänt, låt $a_1, a_2, a_3, \ldots \in \mathbb{R}$. Bilda

Delsummor
$$\begin{cases} s_1 = a_1 \\ s_2 = a_1 + a_2 \\ s_3 = a_1 + a_2 + a_3 \\ \vdots \\ s_n = a_1 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \end{cases}$$

<u>Def.</u> Om $s \overset{\text{def}}{=} \lim_{n \to \infty} s_n$ existerar ändligt (dvs $s \in \mathbb{R}$) sägs $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ vara en <u>konvergent serie</u> med <u>summan s</u> och vi skriver $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = s$. I annat fall sägs $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ vara en <u>divergent serie</u>

<u>Tolkning</u>: a_k = ett enda steg, $a_k > 0$: framåt
$a_k < 0$: bakåt

$s_n = a_1 + \ldots + a_n$ = nettoförflyttning efter n steg,
$s_n > 0$: framåt
$s_n < 0$: bakåt



SATS (Divergenstestet) Om termerna i en serie **inte** går mot noll, så är serien divergent, dvs:

$$a_k \not\to 0 \text{ då } k \to \infty \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ är divergent}$$

Obs! Test för divergens, inte för konvergens.

SATS (Geometrisk serie)

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots \text{ är } \begin{cases} \text{konv. med summa } \frac{1}{1-q} & \text{om } |q| < 1 \\ \text{div.} & \text{om } |q| \geq 1 \end{cases}$$

Integraler:

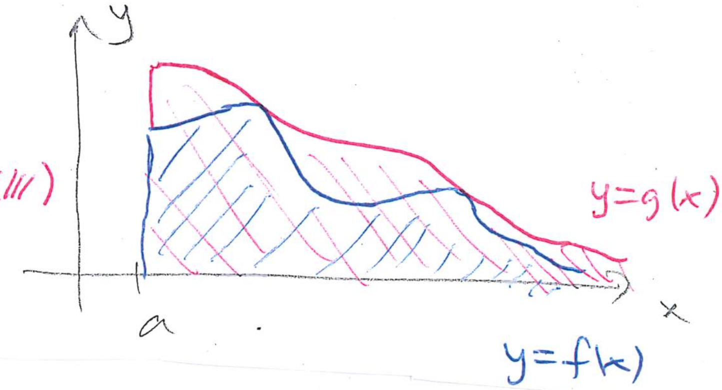
SATS (Jämförelsekriteriet) Om $0 \leq f(x) \leq g(x)$ då $a < x < b$ (a och b får vara $-\infty$ resp ∞) gäller:

(1) $\int_a^b g(x)\,dx$ konv. $\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx$ konv., och $0 \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$

(2) $\int_a^b f(x)\,dx$ div. $\Rightarrow \int_a^b g(x)\,dx$ div.

Areatolkning

$0 \leq \text{area}(///) \leq \text{area}(///)$



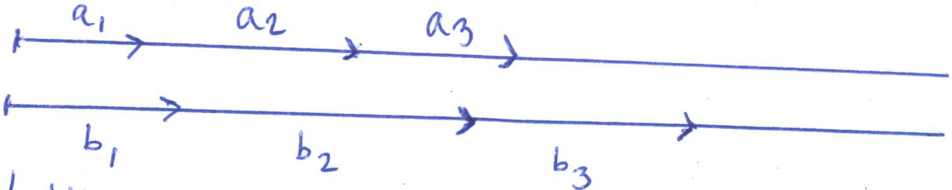
Serier:

SATS (Jämförelsekriteriet) Om $0 \leq a_k \leq b_k \ \forall k \geq 1$ gäller:

(1) $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konv. $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konv., och $0 \leq \sum_{k=1}^{\infty} a_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} b_k$

(2) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ div $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} b_k$ div.

"Promenadtolkning"



B:s steg är minst lika långa som A:s steg.

Integraler:

FÖLJDSATS (Jämförelsekriteriet på kvotform)

Om

- $f(x) \geq 0$ och $g(x) \geq 0$ på $a < x < b$, där b får vara ∞
- $\int_a^b f(x)\,dx$ och $\int_a^b g(x)\,dx$ är generaliserade endast i b
- $\dfrac{f(x)}{g(x)} \to A$ då $x \to b^-$, där $0 < A < \infty$

så är

$\int_a^b f(x)\,dx$ & $\int_a^b g(x)\,dx$ antingen båda konv. eller båda div.

Motsvarande gäller om de är generaliserade endast i a, där a får vara $-\infty$.

Serier:

FÖLJDSATS (Jämförelsekriteriet på kvotform)

Om

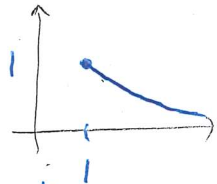
- $a_k \geq 0$ och $b_k \geq 0 \;\forall\, k \geq 1$
- $\dfrac{a_k}{b_k} \to A$ då $k \to \infty$, där $0 < A < \infty$

så är $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ & $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ antingen båda konv. eller båda div.

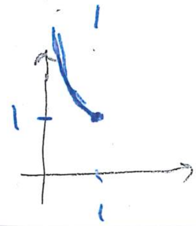
Integraler:

Några bra jämförelseintegraler:

- $\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$ är $\begin{cases} \text{konv. om } \alpha > 1 \\ \text{div. om } \alpha \leq 1 \end{cases}$



- $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ är $\begin{cases} \text{konv. om } \alpha < 1 \\ \text{div. om } \alpha \geq 1 \end{cases}$



Serier:

Några bra jämförelseserier

- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ är $\begin{cases} \text{konv. om } \alpha > 1 \\ \text{div. om } \alpha \leq 1 \end{cases}$

Integraler:

* Absolutkonvergens

När integranderna växlar tecken fungerar inte jämförelsekriterierna.

SATS Om $\int_a^b |f(x)|\,dx$ är konvergent,

så är $\int_a^b f(x)\,dx$ konvergent, och

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b \underbrace{|f(x)|}_{\geq 0,\ \text{positiv integrand!}}\,dx \qquad (a<b)$$

Serier:

* Absolutkonvergens

SATS Om $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ är konvergent, så är $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konv.,

och $\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$

Positiv serie, kriterierna ovan fungerar för den (jfr. kriterierna)

* Leibniz kriterium för alternerande serier

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ sägs vara <u>alternerande</u> om

varannan term ≥ 0

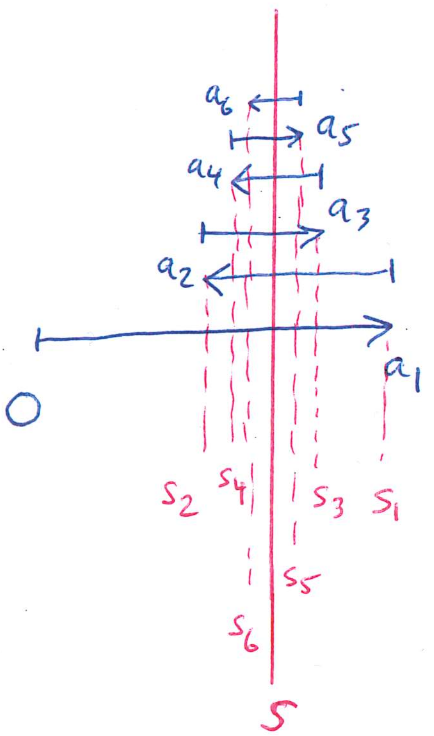
—— " —— ≤ 0

En alternerande serie där

$|a_k| \downarrow 0$ (utläses: <u>avtar</u> mot noll),

dvs $|a_1| \geq |a_2| \geq |a_3| \geq \dots$ & $|a_k| \to 0$

sägs vara en <u>Leibnizserie</u>



"Leibniz julgran"

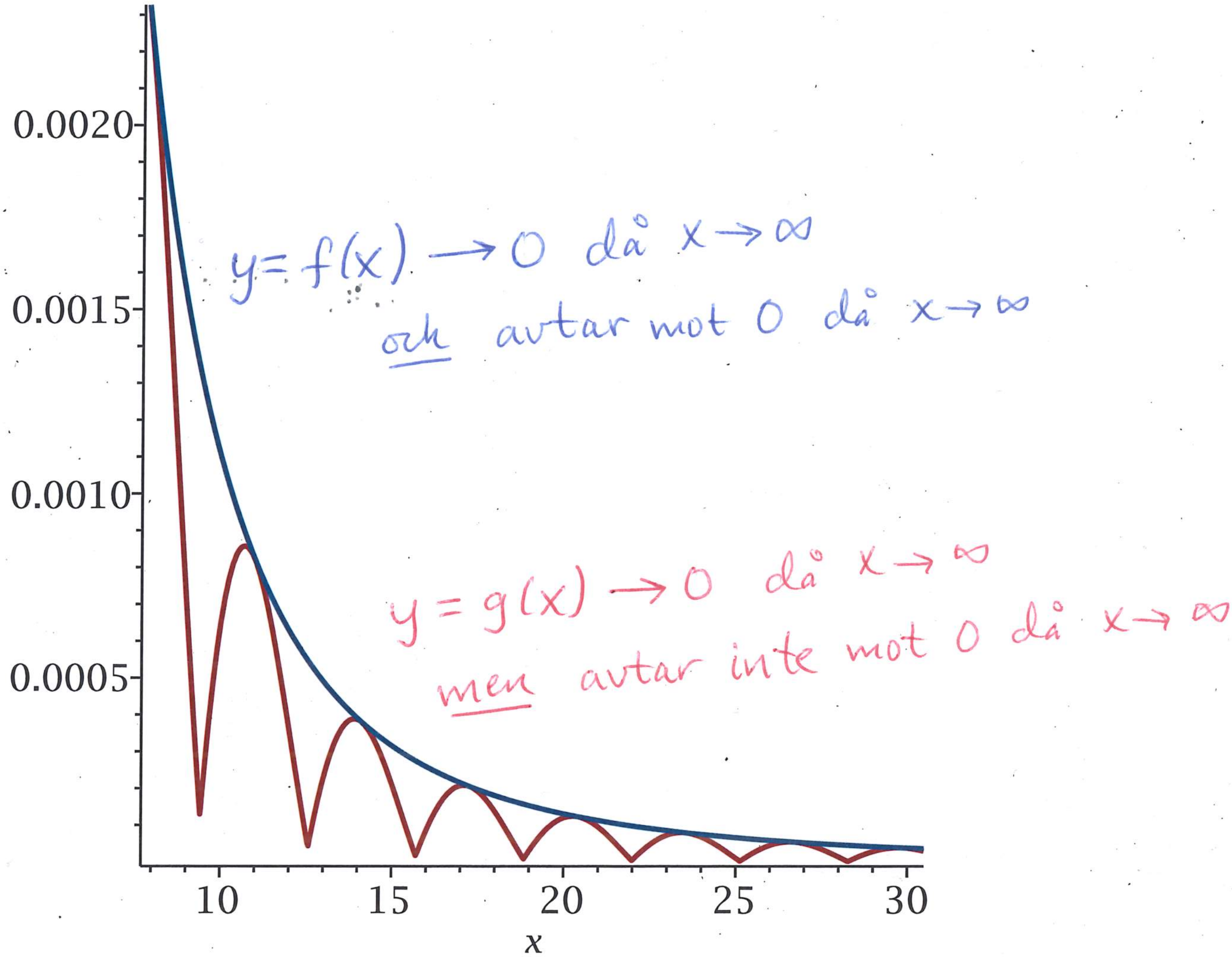
SATS (Leibniz kriterium)

Leibnitzserier $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ är konvergenta, och för summan s gäller $$|s - s_n| \leq |a_{n+1}| \quad \forall n$$
där $s_n = a_1 + \dots + a_n$

Bevisidé: Se fig. Detaljer: bok / GNP.

Obs! Viktigt att $|a_k| \searrow 0$. (att $|a_k| \to 0$ räcker ej)

Obs! Uppskattningen $|s-s_n| \leq |a_{n+1}|$ gäller för Leibnitzserier (inte allmänt).


0.0020
0.0015
0.0010
0.0005
10
15
20
25
30
x
$y = f(x) \to 0$ då $x \to \infty$
och avtar mot 0 då $x \to \infty$
$y = g(x) \to 0$ då $x \to \infty$
men avtar inte mot 0 då $x \to \infty$

Potensserier

Låt $c_0, c_1, c_2, \ldots \in \mathbb{R}$ vara konstanter och $x \in \mathbb{R}$ är en variabel. Bilda serien

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots \quad \left(\text{potens-serie}\right)$$

För varje värde på x får vi en numerisk serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots \quad \text{med } a_k = c_k x^k$$

Viktig fråga: Var konvergerar potensserier?

"För vilka x?"

SATS (Jämförelse med geometrisk serie)

Låt $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ vara en numerisk serie. Om

$$Q = \lim_{k \to \infty} \sqrt[k]{|a_k|} \qquad (\text{rotkriteriet})$$

eller

$$Q = \lim_{k \to \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \qquad (\text{kvotkriteriet})$$

existerar, $0 \leq Q \leq \infty$, så är

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \begin{cases} \text{absolutkonvergent om } Q < 1 \ (\text{inkl. } Q = 0) \\ \text{divergent om } Q > 1 \ (\text{inkl. } Q = \infty) \end{cases}$$

(Inget besked ges då $Q = 1$)

SATS Till varje potensserie $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ finns ~~ett~~ entydigt bestämt R, $0 \le R \le \infty$, kallat <u>konvergensradie</u> sådant att

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots \text{ är } \begin{cases} \text{abs. konv. om } |x|<R \\ \text{div. om } |x|>R \end{cases}$$

<u>Anm.</u> Om $R=0$ konv. serien i $x=0$ och endast där

Om $R=\infty$ är serien abs. konv. $\forall x \in \mathbb{R}$

SATS (Termvis derivering och integrering)

Sätt

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \dots, \quad |x|<R$$

där $R>0$ är potensseriens konvergensradie.

Då gäller:

(1) f är deriverbar i $|x|<R$ (och därmed även kontinuerlig där) och

$$f'(x) = \sum_{k=0 \text{ eller } k=1}^{\infty} k c_k x^{k-1} = (0+) c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + \dots, \quad |x|<R$$

(2) f har en primitiv funktion

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \frac{x^{k+1}}{k+1} = c_0 x + c_1 \frac{x^2}{2} + \dots, \quad |x|<R$$

Potensserierna för f' och F har också konv. radie R

<u>Anm.</u> <u>Alla</u> primitiver till f i $|x|<R$ kan skrivas $F(x) + C$. Obs att primitiven i (2) uppfyller $F(0)=0$.

Maclaurinserier

Maclaurinserier

Följande gäller då $|x|<R$:

$R=\infty$:

$$e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^6}{6!}+\frac{x^7}{7!}+\ldots = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$R=1$:

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}x^k}{k}$$

$$(1+x)^\alpha = 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{1\cdot 2}x^2+\ldots = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^k,\quad \alpha\notin\mathbb{N}$$

($\alpha\in\mathbb{N}$: $R=\infty$, endast polynom)

20 mm