

Dagens ämnen

Dagens ämnen

- Deriveringsoperatorn D .

Dagens ämnen

- Deriveringsoperatorn D .
- Förskjutningsregeln.

Dagens ämnen

- Deriveringsoperatorn D .
- Förskjutningsregeln.
- Linjära ODE av ordning n med konstanta koefficienter

Deriveringsoperatorn D

Deriveringsoperatoren D

- $Df(x)$ betyder samma sak som $f'(x)$.

Deriveringsoperatoren D

- $Df(x)$ betyder samma sak som $f'(x)$.
- Liten förskjutning i betydelse.

Deriveringsoperatoren D

- $Df(x)$ betyder samma sak som $f'(x)$.
- Liten förskjutning i betydelse.
 - När vi skriver f' har vi deriverat.

Deriveringsoperatoren D

- $Df(x)$ betyder samma sak som $f'(x)$.
- Liten förskjutning i betydelse.
 - När vi skriver f' har vi deriverat.
 - När vi skriver Df skall vi derivera.

Deriveringsoperatorn D

Deriveringsoperatorn D

- Linjäritet

Deriveringsoperatoren D

- Linjäritet
 - $D(f + g) = Df + Dg,$

Deriveringsoperatoren D

- Linjäritet

- $D(f + g) = Df + Dg,$

- $D(\lambda f) = \lambda Df, \lambda = \text{konstant},$

Deriveringsoperatoren D

- Linjäritet
 - $D(f + g) = Df + Dg$,
 - $D(\lambda f) = \lambda Df$, $\lambda = \text{konstant}$,
- $f'' = D(f') = D(Df) = D^2 f$,

Deriveringsoperatoren D

- Linjäritet

- $D(f + g) = Df + Dg,$

- $D(\lambda f) = \lambda Df, \lambda = \text{konstant},$

- $f'' = D(f') = D(Df) = D^2 f,$

- $f''' = D(f'') = D(D^2 f) = D^3 f$

Deriveringsoperatoren D

- Linjäritet

- $D(f + g) = Df + Dg,$

- $D(\lambda f) = \lambda Df, \lambda = \text{konstant},$

- $f'' = D(f') = D(Df) = D^2 f,$

- $f''' = D(f'') = D(D^2 f) = D^3 f$

- $f^{(n)} = D^n f$

Linjära ODE av ordning 2

- $y'' + a(x)y' + b(x)y = f(x),$

Linjära ODE av ordning 2

- $y'' + a(x)y' + b(x)y = f(x)$,
- Med D kan ekvationen skrivas

$$\begin{aligned} D^2y + a(x)Dy + b(x)y &= \\ &= \underbrace{(D^2 + a(x)D + b(x))} \end{aligned}$$

Linjära ODE av ordning 2

- $y'' + a(x)y' + b(x)y = f(x)$,
- Med D kan ekvationen skrivas

$$\begin{aligned} D^2y + a(x)Dy + b(x)y &= \\ &= \underbrace{(D^2 + a(x)D + b(x))}_{=P(D)} \end{aligned}$$

Linjära ODE av ordning 2

- $y'' + a(x)y' + b(x)y = f(x)$,
- Med D kan ekvationen skrivas

$$\begin{aligned} D^2y + a(x)Dy + b(x)y &= \\ &= \underbrace{(D^2 + a(x)D + b(x))}_{=P(D)} y = \end{aligned}$$

Linjära ODE av ordning 2

- $y'' + a(x)y' + b(x)y = f(x)$,
- Med D kan ekvationen skrivas

$$\begin{aligned} D^2y + a(x)Dy + b(x)y &= \\ &= \underbrace{(D^2 + a(x)D + b(x))}_{=P(D)} y = \\ &= P(D)y = f(x) \end{aligned}$$

Linjära ODE av ordning n

- $y^n + a_{n-1}y^{n-1} + \dots + a_1y' + a_0y = f(x),$

Linjära ODE av ordning n

- $y^n + a_{n-1}y^{n-1} + \dots + a_1y' + a_0y = f(x)$,
- Med D kan ekvationen skrivas

$$\begin{aligned} D^n y + a_{n-1}D^{n-1}y + \dots + a_1Dy + a_0y &= \\ &= \underbrace{(D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \dots + a_1D + a_0)} \end{aligned}$$

Linjära ODE av ordning n

- $y^n + a_{n-1}y^{n-1} + \dots + a_1y' + a_0y = f(x)$,
- Med D kan ekvationen skrivas

$$\begin{aligned} D^n y + a_{n-1}D^{n-1}y + \dots + a_1Dy + a_0y &= \\ &= \underbrace{\left(D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \dots + a_1D + a_0 \right)}_{=P(D)} \end{aligned}$$

Linjära ODE av ordning n

- $y^n + a_{n-1}y^{n-1} + \dots + a_1y' + a_0y = f(x)$,
- Med D kan ekvationen skrivas

$$\begin{aligned} D^n y + a_{n-1}D^{n-1}y + \dots + a_1Dy + a_0y &= \\ &= \underbrace{\left(D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \dots + a_1D + a_0 \right)}_{=P(D)} y = \end{aligned}$$

Linjära ODE av ordning n

- $y^n + a_{n-1}y^{n-1} + \dots + a_1y' + a_0y = f(x)$,
- Med D kan ekvationen skrivas

$$\begin{aligned} D^n y + a_{n-1}D^{n-1}y + \dots + a_1Dy + a_0y &= \\ &= \underbrace{\left(D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \dots + a_1D + a_0 \right)}_{=P(D)} y = \\ &= P(D)y = f(x) \end{aligned}$$

Linjära ODE av ordning n

Linjära ODE av ordning n

- Linjäriteten hos D gör att D^n och $P(D)$ blir linjära.

Linjära ODE av ordning n

- Linjäriteten hos D gör att D^n och $P(D)$ blir linjära.
- $P(D)$ kallas en

linjär differentialoperator

av ordning n .

Förskjutningsregeln, Sats 9.3, sid 411

Förskjutningsregeln, Sats 9.3, sid 411

Om a är konstant och $f(x)$ är deriverbar n gånger så gäller

$$D^n(f(x)e^{ax}) = e^{ax}(D + a)^n f(x).$$

Förskjutningsregeln, Sats 9.3, sid 411

Om a är konstant och $f(x)$ är deriverbar n gånger så gäller

$$D^n(f(x)e^{ax}) = e^{ax}(D + a)^n f(x).$$

Linjäriteten \Rightarrow

$$P(D)(f(x)e^{ax}) = e^{ax}P(D + a)f(x).$$

Förskjutningsregeln, Sats 9.3, sid 411

Om a är konstant och $f(x)$ är deriverbar n gånger så gäller

$$D^n(f(x)e^{ax}) = e^{ax}(D + a)^n f(x).$$

Linjäriteten \Rightarrow

$$P(D)(f(x)e^{ax}) = e^{ax}P(D + a)f(x).$$

Varför?

Förskjutningsregeln, Sats 9.3, sid 411

Om a är konstant och $f(x)$ är deriverbar n gånger så gäller

$$D^n(f(x)e^{ax}) = e^{ax}(D + a)^n f(x).$$

Linjäriteten \Rightarrow

$$P(D)(f(x)e^{ax}) = e^{ax}P(D + a)f(x).$$

Varför? Mekaniserar kalkylen.

Förskjutningsregeln, Sats 9.3, sid 411

Om a är konstant och $f(x)$ är deriverbar n gånger så gäller

$$D^n(f(x)e^{ax}) = e^{ax}(D + a)^n f(x).$$

Linjäriteten \Rightarrow

$$P(D)(f(x)e^{ax}) = e^{ax}P(D + a)f(x).$$

Varför? Mekaniserar kalkylen.

Produktderiveringar blir polynomkalkyl.

Lösningsstruktur, som **SATS 9.1**, sid
395

Lösningsstruktur, som **SATS 9.1**, sid 395

Samtliga lösningar $y(x)$ till

$$P(D)y(x) = f(x)$$

Lösningsstruktur, som **SATS 9.1**, sid 395

Samtliga lösningar $y(x)$ till

$$P(D)y(x) = f(x)$$

kan skrivas på formen

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

Lösningsstruktur, som **SATS 9.1**, sid 395

Samtliga lösningar $y(x)$ till

$$P(D)y(x) = f(x)$$

kan skrivas på formen

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

där y_h är en lösning till $P(D)y(x) = 0$

Lösningsstruktur, som **SATS 9.1**, sid 395

Samtliga lösningar $y(x)$ till

$$P(D)y(x) = f(x)$$

kan skrivas på formen

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

där y_h är en lösning till $P(D)y(x) = 0$ och $y_p(x)$ är **en** lösning till $P(D)y(x) = f(x)$.

Linjära ODE av ordning n

Antag $P(r) = a_0 + a_1r + a_2r^2 + \dots + r^n$
har nollställena r_1, \dots, r_k med multipliciteter
 m_1, \dots, m_k (≥ 1 och $m_1 + m_2 + \dots + m_k = n$).

Då kan vi skriva (Faktorsatsen, Sats 1.2, sid 28)

$$P(r) = (r - r_1)^{m_1} \cdot (r - r_2)^{m_2} \cdot \dots \cdot (r - r_k)^{m_k}.$$

Ger att y_h får samma struktur som tidigare.

SATS 9.2, sid 397

SATS 9.2, sid 397

Betrakta den homogena ekvationen

$$y'' + ay' + by = P(D)y = 0$$

och låt r_1, r_2 vara nollställena till den karakteristiska ekvationen $P(r) = 0$.

SATS 9.2, sid 397

Betrakta den homogena ekvationen

$$y'' + ay' + by = P(D)y = 0$$

och låt r_1, r_2 vara nollställena till den karakteristiska ekvationen $P(r) = 0$.

Då ges samtliga lösningar av

$$y(x) = \begin{cases} C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} & \text{om } r_1 \neq r_2 \\ e^{r_1 x} (C_1 x + C_2) & \text{om } r_1 = r_2 \end{cases}$$

Sats 9.4, sid 412

Om $P(r) = 0$ har lösningarna r_1, r_2, \dots, r_k
med multipliciteter m_1, m_2, \dots, m_k så har
 $P(D)y = 0$ lösningarna

$$y(x) = p_1(x)e^{r_1x} + \dots + p_k(x)e^{r_kx}$$

där p_j är godtyckliga polynom av gradtal
 $\leq m_j - 1$.