

TATA42 Envariabelanalys, del2

TATA42 Envariabelanalys, del2

- Föreläsare och examinator: Ulf Janfalk

TATA42 Envariabelanalys, del2

- Föreläsare och examinator: Ulf Janfalk
- Kurshemsida:

<http://courses.mai.liu.se/GU/TATA42/>

TATA42 Envariabelanalys, del2

- Föreläsare och examinator: Ulf Janfalk
- Kurshemsida:

<http://courses.mai.liu.se/GU/TATA42/>

Där finns det mesta om kursen. Allt extra som visas under föreläsningarna kommer att läggas upp under fliken “Extramaterial”.

TATA42 Envariabelanalys, del2

- Föreläsare och examinator: Ulf Janfalk
- Kurshemsida:

<http://courses.mai.liu.se/GU/TATA42/>

Där finns det mesta om kursen. Allt extra som visas under föreläsningarna kommer att läggas upp under fliken “Extramaterial”.

Dagens ämnen

- Maclaurins formel.

Dagens ämnen

- Maclaurins formel.
- Taylors formel.

Dagens ämnen

- Maclaurins formel.
- Taylors formel.
- Restterm i ordo-form.

Dagens ämnen

- Maclaurins formel.
- Taylors formel.
- Restterm i ordo-form.
- Elementära Maclaurinutvecklingar.

Dagens ämnen

- Maclaurins formel.
- Taylors formel.
- Restterm i ordo-form.
- Elementära Maclaurinutvecklingar.
- Några enkla tillämpningar.

Approximation

Approximation

- Vill approximera “krånglig” funktion med enklare, t ex polynom.

Approximation

- Vill approximera “krånglig” funktion med enklare, t ex polynom.
- Två varianter:

Approximation

- Vill approximera “krånglig” funktion med enklare, t ex polynom.
- Två varianter:
 - Global approximation: skall funka på “långt” intervall.

Approximation

- Vill approximera “krånglig” funktion med enklare, t ex polynom.
- Två varianter:
 - Global approximation: skall funka på “långt” intervall.
 - Lokal approximation: skall funka “nära” viss punkt.

Approximation

- Vill approximera “krånglig” funktion med enklare, t ex polynom.
- Två varianter:
 - Global approximation: skall funka på “långt” intervall.
 - Lokal approximation: skall funka “nära” viss punkt.
- Vad som är “bästa” approximationen beror på hur vi bestämt oss för att mäta felet.

Taylor's och Maclaurin's formel

Taylor's och Maclaurin's formel

- Taylor och Maclaurin: Lokal approximation.

Taylor's och Maclaurin's formel

- Taylor och Maclaurin: Lokal approximation.
- Maclaurin's formel: approximation med polynom “nära” $x = 0$.

Taylor's och Maclaurin's formel

- Taylor och Maclaurin: Lokal approximation.
- Maclaurin's formel: approximation med polynom “nära”
 $x = 0$.
- Taylor's formel: samma som Maclaurin men för godtyckligt x ,
 $x = a$.

Taylor's och Maclaurin's formel

- Taylor och Maclaurin: Lokal approximation.
- Maclaurin's formel: approximation med polynom “nära” $x = 0$.
- Taylor's formel: samma som Maclaurin men för godtyckligt x , $x = a$.
- Taylor's formel kom först (1715) och Maclaurin's senare (1742).

Maclaurins formel

Maclaurins formel

- Antag att f har kontinuerliga derivator åtminstone upp till ordning $n + 1$.

Maclaurins formel

- Antag att f har kontinuerliga derivator åtminstone upp till ordning $n + 1$.
- Vill approximera f med termer av typ x^n

Maclaurins formel

- Antag att f har kontinuerliga derivator åtminstone upp till ordning $n + 1$.
- Vill approximera f med termer av typ x^n , dvs

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n + r_{n+1}(x)$$

Maclaurins formel

- Antag att f har kontinuerliga derivator åtminstone upp till ordning $n + 1$.
- Vill approximera f med termer av typ x^n , dvs

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n + r_{n+1}(x)$$

och där felet $r_{n+1}(x)$ är litet jämfört med sista termen a_nx^n .

Maclaurins formel

- Antag att f har kontinuerliga derivator åtminstone upp till ordning $n + 1$.
- Vill approximera f med termer av typ x^n , d v s

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n + r_{n+1}(x)$$

och där felet $r_{n+1}(x)$ är litet jämfört med sista termen a_nx^n .

- Hur skall vi välja koefficienterna?.

Maclaurins formel

Sats 8.1 (Maclaurins formel, sid 352)

Om $f \in C^{n+1}$ i en omgivning av 0 så har f Maclaurinutvecklingen

Maclaurins formel

Sats 8.1 (Maclaurins formel, sid 352)

Om $f \in C^{n+1}$ i en omgivning av 0 så har f Maclaurinutvecklingen

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + r_{n+1}(x)$$

Maclaurins formel

Sats 8.1 (Maclaurins formel, sid 352)

Om $f \in C^{n+1}$ i en omgivning av 0 så har f Maclaurinutvecklingen

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + r_{n+1}(x)$$

där resttermen $r_{n+1}(x)$ kan skrivas på formen

$$r_{n+1}(x) = \mathcal{O}(x^{n+1})$$

för x nära 0.

Maclaurins formel

Sats 8.1 (Maclaurins formel, sid 352)

Om $f \in C^{n+1}$ i en omgivning av 0 så har f Maclaurinutvecklingen

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + r_{n+1}(x)$$

där resttermen $r_{n+1}(x)$ kan skrivas på formen

$$r_{n+1}(x) = \mathcal{O}(x^{n+1})$$

för x nära 0.

Återkommer senare till vad $\mathcal{O}(x^{n+1})$ betyder.

Maclaurins formel

Sats 8.1 (Maclaurins formel, sid 352)

Om $f \in C^{n+1}$ i en omgivning av 0 så har f Maclaurinutvecklingen

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + r_{n+1}(x)$$

där resttermen $r_{n+1}(x)$ kan skrivas på formen

$$r_{n+1}(x) = \mathcal{O}(x^{n+1})$$

för x nära 0.

Återkommer senare till vad $\mathcal{O}(x^{n+1})$ betyder.

Observera att då “ x nära 0” så är efterföljande term i utvecklingen mycket mindre än föregångaren.

Maclaurinpolynommet

Definition 8.1 (Maclaurinpolynommet, sid 351)

Polynommet

$$p_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

kallas Maclaurinpolynommet av ordning n till f .

Maclaurinpolynommet

Definition 8.1 (Maclaurinpolynommet, sid 351)

Polynommet

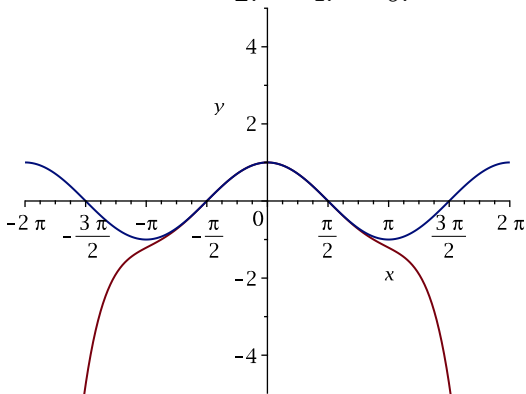
$$p_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

kallas Maclaurinpolynommet av ordning n till f .

OBS!! Vi säger *ordning* inte *grad* eftersom p_n har grad $< n$ om $f^{(n)}(0) = 0$.

Maclaurinutveckling av $\cos x$, x “nära” 0

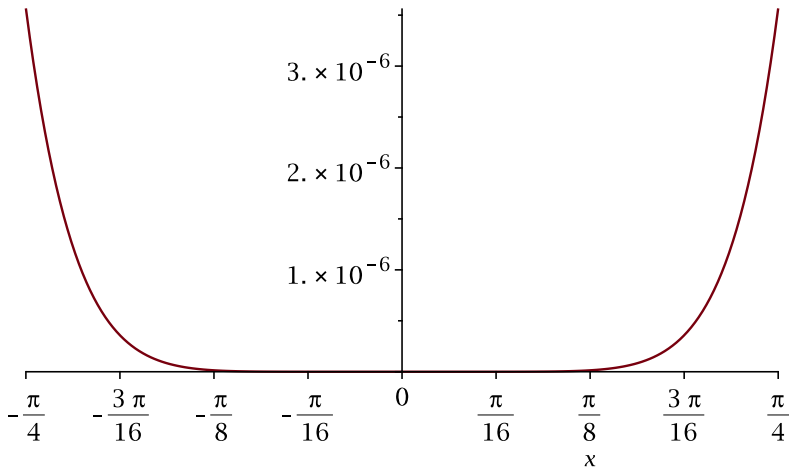
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \mathcal{O}(x^8)$$



Plot av $\cos x$ tillsammans med sitt **Maclaurinpolynom av ordning 7** (och grad 6).

Maclaurinutveckling av $\cos x$, x “nära” 0

Plot av $\cos x$ – Maclaurinpolynomet av ordning 7 (och grad 6).



Ordoaritmetik, $|x| < 1$

Ordoaritmetik, $|x| < 1$

- ① $\mathcal{O}(1)$ =begränsad funktion, ej konstant. Samma storleksordning som en konstant.

Ordoaritmetik, $|x| < 1$

- ① $\mathcal{O}(1)$ = begränsad funktion, ej konstant. Samma storleksordning som en konstant.
- ② $\mathcal{O}(x^n) = x^n \mathcal{O}(1)$

Ordoaritmetik, $|x| < 1$

- ① $\mathcal{O}(1)$ = begränsad funktion, ej konstant. Samma storleksordning som en konstant.
- ② $\mathcal{O}(x^n) = x^n \mathcal{O}(1) = x^k \mathcal{O}(x^{n-k})$

Ordoaritmetik, $|x| < 1$

- 1 $\mathcal{O}(1)$ =begränsad funktion, ej konstant. Samma storleksordning som en konstant.
- 2 $\mathcal{O}(x^n) = x^n \mathcal{O}(1) = x^k \mathcal{O}(x^{n-k})$
- 3 $\mathcal{O}(x^n) + \mathcal{O}(x^m) = \mathcal{O}(x^n)$ om $n \leq m$.

Ordoaritmetik, $|x| < 1$

- 1 $\mathcal{O}(1)$ = begränsad funktion, ej konstant. Samma storleksordning som en konstant.
- 2 $\mathcal{O}(x^n) = x^n \mathcal{O}(1) = x^k \mathcal{O}(x^{n-k})$
- 3 $\mathcal{O}(x^n) + \mathcal{O}(x^m) = \mathcal{O}(x^n)$ om $n \leq m$.
- 4 $\mathcal{O}(x^n) \cdot \mathcal{O}(x^m) = \mathcal{O}(x^{n+m})$

Ordoaritmetik, $|x| < 1$

- 1 $\mathcal{O}(1)$ = begränsad funktion, ej konstant. Samma storleksordning som en konstant.
- 2 $\mathcal{O}(x^n) = x^n \mathcal{O}(1) = x^k \mathcal{O}(x^{n-k})$
- 3 $\mathcal{O}(x^n) + \mathcal{O}(x^m) = \mathcal{O}(x^n)$ om $n \leq m$.
- 4 $\mathcal{O}(x^n) \cdot \mathcal{O}(x^m) = \mathcal{O}(x^{n+m})$
- 5 $\mathcal{O}(x^n) - \mathcal{O}(x^n) = \mathcal{O}(x^n)$

Ordoaritmetik, $|x| < 1$

- 1 $\mathcal{O}(1)$ =begränsad funktion, ej konstant. Samma storleksordning som en konstant.
- 2 $\mathcal{O}(x^n) = x^n \mathcal{O}(1) = x^k \mathcal{O}(x^{n-k})$
- 3 $\mathcal{O}(x^n) + \mathcal{O}(x^m) = \mathcal{O}(x^n)$ om $n \leq m$.
- 4 $\mathcal{O}(x^n) \cdot \mathcal{O}(x^m) = \mathcal{O}(x^{n+m})$
- 5 $\mathcal{O}(x^n) - \mathcal{O}(x^n) = \mathcal{O}(x^n)$
- 6 $-\mathcal{O}(x^n) = \mathcal{O}(x^n)$

Ordoaritmetik, $|x| < 1$

- 1 $\mathcal{O}(1)$ =begränsad funktion, ej konstant. Samma storleksordning som en konstant.
- 2 $\mathcal{O}(x^n) = x^n \mathcal{O}(1) = x^k \mathcal{O}(x^{n-k})$
- 3 $\mathcal{O}(x^n) + \mathcal{O}(x^m) = \mathcal{O}(x^n)$ om $n \leq m$.
- 4 $\mathcal{O}(x^n) \cdot \mathcal{O}(x^m) = \mathcal{O}(x^{n+m})$
- 5 $\mathcal{O}(x^n) - \mathcal{O}(x^n) = \mathcal{O}(x^n)$
- 6 $-\mathcal{O}(x^n) = \mathcal{O}(x^n)$
- 7 $\mathcal{O}(x^n \mathcal{O}(x^m)) = \mathcal{O}(x^{n+m})$

Taylor's formel

Taylor's formel

- Hur får vi till motsvarande formel nära en godtycklig punkt?

Taylor's formel

- Hur får vi till motsvarande formel nära en godtycklig punkt?
- Byt variabel så att $x = a$ svarar mot nya variabeln $t = 0$.

Taylor's formel

- Hur får vi till motsvarande formel nära en godtycklig punkt?
- Byt variabel så att $x = a$ svarar mot nya variabeln $t = 0$.
- Sätt $x = a + t$.

Taylor's formel

- Hur får vi till motsvarande formel nära en godtycklig punkt?
- Byt variabel så att $x = a$ svarar mot nya variabeln $t = 0$.
- Sätt $x = a + t$.
- Då är $g(t) = f(a + t)$ och $g(t)$ är lika deriverbar som $f(x)$.

Taylor's formel

- Hur får vi till motsvarande formel nära en godtycklig punkt?
- Byt variabel så att $x = a$ svarar mot nya variabeln $t = 0$.
- Sätt $x = a + t$.
- Då är $g(t) = f(a + t)$ och $g(t)$ är lika deriverbar som $f(x)$.
- Följaktligen kan vi använda Maclaurins formel på $g(t)$.

Taylor's formel

Taylor's formel

Sats 8.2 (Taylor's formel, sid 354)

Om $f \in C^{n+1}$ i en omgivning av $x=a$ så har f Taylorutvecklingen

Taylor's formel

Sats 8.2 (Taylor's formel, sid 354)

Om $f \in C^{n+1}$ i en omgivning av $x=a$ så har f Taylorutvecklingen

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \\ + \frac{f'''(a)}{3!}(x - a)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n + r_{n+1}(x)$$

Taylor's formel

Sats 8.2 (Taylor's formel, sid 354)

Om $f \in C^{n+1}$ i en omgivning av $x=a$ så har f Taylorutvecklingen

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \\ + \frac{f'''(a)}{3!}(x - a)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n + r_{n+1}(x)$$

där resttermen $r_{n+1}(x)$ kan skrivas på formen

$$r_{n+1}(x) = \mathcal{O}((x - a)^{n+1})$$

för x nära a .

Taylor's formel

Sats 8.2 (Taylor's formel, sid 354)

Om $f \in C^{n+1}$ i en omgivning av $x=a$ så har f Taylorutvecklingen

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \\ + \frac{f'''(a)}{3!}(x - a)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n + r_{n+1}(x)$$

där resttermen $r_{n+1}(x)$ kan skrivas på formen

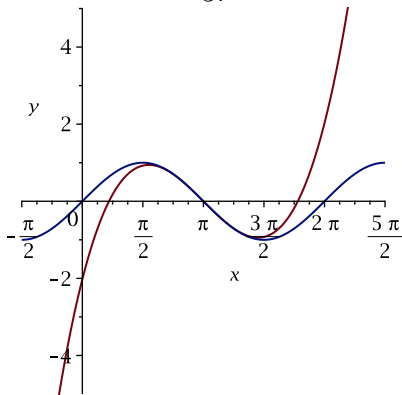
$$r_{n+1}(x) = \mathcal{O}((x - a)^{n+1})$$

för x nära a .

Observera att då x är "nära a " så är efterföljande term i utvecklingen mycket mindre än föregångaren.

Taylorutveckling av $\sin x$ kring $x = \pi$

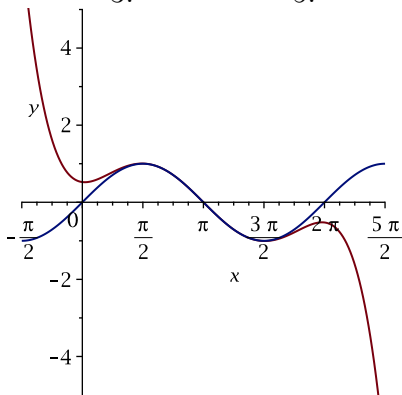
$$\sin x = -(x - \pi) + \frac{1}{3!}(x - \pi)^3 + \mathcal{O}((x - \pi)^5)$$



$\sin x$ plottad med sitt **taylorpolynom av ordning 4 (grad 3)** kring $x = \pi$.

Taylorutveckling av $\sin x$ kring $x = \pi$

$$\sin x = -(x - \pi) + \frac{1}{3!}(x - \pi)^3 - \frac{1}{5!}(x - \pi)^5 + \mathcal{O}((x - \pi)^7)$$



$\sin x$ plottad med sitt **taylorpolynom av ordning 6 (grad 5)** kring $x = \pi$.

Sats 8.3 (sid 360)

$$(a) \quad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \mathcal{O}(x^{n+1})$$

Sats 8.3 (sid 360)

$$(a) \quad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \mathcal{O}(x^{n+1})$$

$$(b) \quad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \mathcal{O}(x^{2n+1})$$

Standardutvecklingar

Sats 8.3 (sid 360)

$$(a) \quad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \mathcal{O}(x^{n+1})$$

$$(b) \quad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \mathcal{O}(x^{2n+1})$$

$$(c) \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \mathcal{O}(x^{2n+2})$$

Standardutvecklingar

Sats 8.3 (sid 360)

$$(a) \quad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \mathcal{O}(x^{n+1})$$

$$(b) \quad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \mathcal{O}(x^{2n+1})$$

$$(c) \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \mathcal{O}(x^{2n+2})$$

Sats 8.3 (sid 360)

$$(d) \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \mathcal{O}(x^{n+1})$$

Sats 8.3 (sid 360)

$$(d) \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \mathcal{O}(x^{n+1})$$

$$(e) (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \binom{\alpha}{2} x^2 + \binom{\alpha}{3} x^3 + \dots + \binom{\alpha}{n} x^n + \mathcal{O}(x^{n+1})$$

Sats 8.3 (sid 360)

$$(d) \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \mathcal{O}(x^{n+1})$$

$$(e) (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \binom{\alpha}{2} x^2 + \binom{\alpha}{3} x^3 + \dots + \binom{\alpha}{n} x^n + \mathcal{O}(x^{n+1})$$

$$\binom{\alpha}{2} = \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}$$

Sats 8.3 (sid 360)

$$(d) \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \mathcal{O}(x^{n+1})$$

$$(e) (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \binom{\alpha}{2} x^2 + \binom{\alpha}{3} x^3 + \dots + \binom{\alpha}{n} x^n + \mathcal{O}(x^{n+1})$$

$$\binom{\alpha}{2} = \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}, \quad \binom{\alpha}{3} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}$$

Sats 8.3 (sid 360)

$$(d) \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \mathcal{O}(x^{n+1})$$

$$(e) (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \binom{\alpha}{2} x^2 + \binom{\alpha}{3} x^3 + \dots + \binom{\alpha}{n} x^n + \mathcal{O}(x^{n+1})$$

$$\binom{\alpha}{2} = \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}, \quad \binom{\alpha}{3} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} = \binom{\alpha}{2} \frac{\alpha-2}{3}$$

Sats 8.3 (sid 360)

$$(d) \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \mathcal{O}(x^{n+1})$$

$$(e) (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \binom{\alpha}{2} x^2 + \binom{\alpha}{3} x^3 + \dots + \binom{\alpha}{n} x^n + \mathcal{O}(x^{n+1})$$

$$\binom{\alpha}{2} = \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}, \quad \binom{\alpha}{3} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} = \binom{\alpha}{2} \frac{\alpha-2}{3}, \text{ etc}$$

Sats 8.3 (sid 360)

$$(d) \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \mathcal{O}(x^{n+1})$$

$$(e) (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \binom{\alpha}{2} x^2 + \binom{\alpha}{3} x^3 + \dots + \binom{\alpha}{n} x^n + \mathcal{O}(x^{n+1})$$

$$\binom{\alpha}{2} = \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}, \quad \binom{\alpha}{3} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} = \binom{\alpha}{2} \frac{\alpha-2}{3}, \text{ etc}$$

$$(f) \arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \mathcal{O}(x^{2n+1})$$