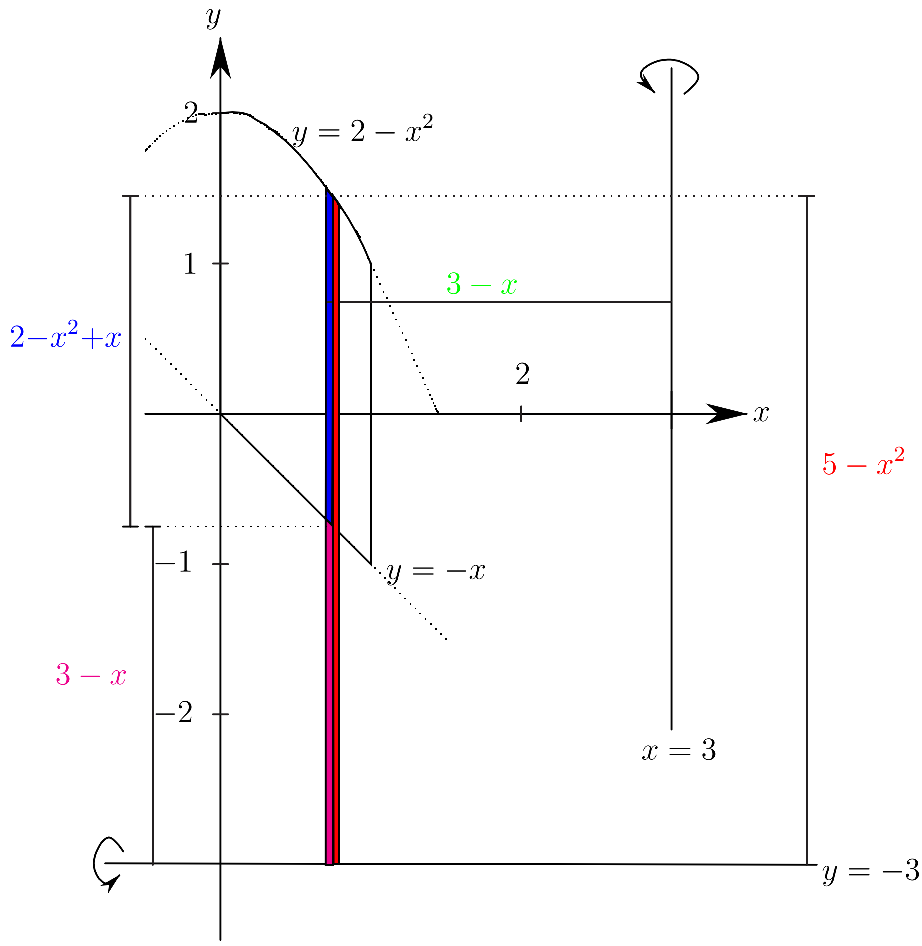
Lösningsförslag till TATA42, Envariabelanalys, del 2, 2020–08–29, 14–19

1. Vi börjar med figuren.



(a) Vid rotation kring $y = -3$ tillämpar vi skivformeln och roterar först den röda remsan för att sedan subtrahera den volym som den lila remsan genererar. Då fås

$$\begin{aligned} dV &= dV_1 - dV_2 = \pi\left(2 - x^2 - (-3)\right)^2 dx - \pi\left(-x - (-3)\right)^2 dx = \\ &= \pi\left(\left(5 - x^2\right)^2 - (3 - x)^2\right) dx = \pi\left(25 - 10x^2 + x^4 - \left(9 - 6x + x^2\right)\right) dx = \\ &= \pi\left(16 + 6x - 11x^2 + x^4\right) dx \quad \text{vilket ger} \\ V &= \int dV = \pi \int_0^1 \left(16 + 6x - 11x^2 + x^4\right) dx \end{aligned}$$

(b) Vid rotation kring $x = 3$ tillämpar vi rörformeln.

$$\begin{aligned} dV &= \text{Rörets volym} = \text{Omkrets} \cdot \text{höjd} \cdot \text{tjocklek} = \\ &= 2\pi(3 - x) \cdot (2 - x^2 - (-x))dx = 2\pi(3 - x)(2 + x - x^2)dx = \\ &= 2\pi\left(6 + x - 4x^2 + x^3\right) dx \quad \text{vilket ger} \\ V &= \int dV = 2\pi \int_0^1 \left(6 + x - 4x^2 + x^3\right) dx \end{aligned}$$

Svar: $V =$ (a) $\pi \int_0^1 \left(16 + 6x - 11x^2 + x^4\right) dx$, (b) $2\pi \int_0^1 \left(6 + x - 4x^2 + x^3\right) dx$.

2. (a) Vi Maclaurinutvecklar täljare (T) och nämnare (N) var för sig och får då

$$N = \cos\left(x^3\right) - 1 = 1 - \frac{1}{2}\left(x^3\right)^2 + \mathcal{O}\Big(\left(x^3\right)^4\Big) - 1 = -\frac{1}{2}x^6 + \mathcal{O}\big(x^{12}\big),$$
$$T = \sin\left(x^2\right) - x^2 = x^2 - \frac{1}{3!}\left(x^2\right)^3 + \mathcal{O}\Big(\left(x^2\right)^5\Big) - x^2 = -\frac{1}{6}x^6 + \mathcal{O}\big(x^{10}\big),$$
$$\frac{T}{N} = \frac{-\frac{1}{6}x^6 + \mathcal{O}(x^{10})}{-\frac{1}{2}x^6 + \mathcal{O}(x^{12})} = \frac{\frac{1}{6} + \mathcal{O}(x^4)}{\frac{1}{2} + \mathcal{O}(x^6)} \to \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

då $x \to 0$.

(b) Då vi bara har en x^2-term i nämnaren räcker det att utveckla

$$\arctan x = x + \mathcal{O}\big(x^3\big)$$

eftersom vi aldrig kommer behöva termer av grad 3 eller högre. Vi utvecklar $\ln(1+t)$ med $t = \arctan x$ och får

$$\ln(1+t) = t - \frac{1}{2}t^2 + \mathcal{O}\big(t^3\big),$$
$$\begin{aligned} T &= \ln(1+\arctan x) - x = \ln\Big(1 + \big(x + \mathcal{O}(x^3)\big)\Big) - x \\ &= \big(x + \mathcal{O}(x^3)\big) - \frac{1}{2}\big(x + \mathcal{O}(x^3)\big)^2 + \mathcal{O}\Big(\big(x + \mathcal{O}(x^3)\big)^3\Big) - x = \\ &= \mathcal{O}\big(x^3\big) - \frac{1}{2}x^2 + \mathcal{O}\Big(x^3\left(1 + \mathcal{O}(x^2)\right)^3\Big) = -\frac{1}{2}x^2 + \mathcal{O}\big(x^3\big), \end{aligned}$$

,

$$\frac{T}{x^2} = \frac{-\frac{1}{2}x^2 + \mathcal{O}(x^3)}{x^2} = -\frac{1}{2} + \mathcal{O}(x) \to -\frac{1}{2}$$

då $x \to 0$.

(c) Vi börjar med den första delen av uttrycket.

$$\frac{1}{x^3}(x - \sin x) = \underbrace{\frac{1}{x^2}\Big(1 - \underbrace{\frac{1}{x}\sin x}_{\to 0}\Big)}_{\to 0}$$

då $x \to \infty$ eftersom, i båda fallen,

"nåt som går mot noll gånger nåt begränsat, går mot noll",

se SATS 3.1, sid 127 i boken. I den andra delen tänker vi $\dfrac{1}{x}$ som variabel. Då x är stort blir $\dfrac{1}{x}$ litet och vi kan Maclaurinutveckla. Detta ger

$$x - \sin\frac{1}{x} = x - \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{3!}\left(\frac{1}{x}\right)^3 + \mathcal{O}\left(\left(\frac{1}{x}\right)^5\right)\right) = \frac{1}{6x^3} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^5}\right),$$
$$x^3\left(\frac{1}{x} - \sin\frac{1}{x}\right) = x^3\left(\frac{1}{6x^3} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^5}\right)\right) = \frac{1}{6} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^2}\right) \to \frac{1}{6}$$

då $x \to \infty$.

Svar: (a) $\dfrac{1}{3}$, (b) $-\dfrac{1}{2}$, (c) $\dfrac{1}{6}$.

3. Vi börjar med det karakteristiska polynomet till operatorn $y''' - y'$ och löser sedan dess karakterisitiska ekvation. Vi får

$$P(r) = r^3 - r = r\left(r^2 - 1\right) = r(r+1)(r-1) = 0 \iff r = 0, \pm 1 \iff$$
$$\iff y_h = A + B\mathrm{e}^x + C\mathrm{e}^{-x}$$

För att bestämma partikulärlösningen y_p ansätter vi $y_p = \mathrm{e}^x z$ och använder förskjutningsregeln. Vi får

$$P(D)y_p = P(D)(\mathrm{e}^x z) = \mathrm{e}^x P(D+1)z = 4\mathrm{e}^x \iff P(D+1)z = 4,$$
$$P(D+1)z = (D+1)((D+1)+1)((D-1)+1)z = (D+1)(D+2)Dz =$$
$$= \left(D^2 + 3D + 2\right)Dz = \left(D^3 + 3D^2 + 2D\right)z = z''' + 3z'' + 2z' = 4.$$

Med $z = 2x$ som *en* lösning till denna ekvation, följer det att

$$y_p = \mathrm{e}^x z = 2x\mathrm{e}^x, \quad y = y_h + y_p = A + B\mathrm{e}^x + C\mathrm{e}^{-x} + 2x\mathrm{e}^x = A + (B+2x)\mathrm{e}^x + C\mathrm{e}^{-x}.$$

De lösningar som har (ändligt) gränsvärde då $x \to -\infty$ är de som söks. Då

$$(B+2x)\mathrm{e}^x = B\mathrm{e}^x + 2x\mathrm{e}^x \to 0 \quad \text{och} \quad \mathrm{e}^{-x} \to \infty$$

oberoende av B då $x \to -\infty$ (standardgränsvärden) följer att enda möjligheten att få (ändligt) gränsvärde är $C = 0$, d v s

$$y = A + (B+2x)\mathrm{e}^x.$$

Svar: $y = A + (B+2x)\mathrm{e}^x$.

4. (a) Enda problemet med integranden är att vi får 0 i nämnaren för $x = 0$ så integralen är generaliserad i 0 endast. Då det endast är integrandens beteende nära $x = 0$ som har betydelse för konvergensfrågan kan vi Maclaurinutveckla nämnaren.

$$f(x) = \frac{x^2 + \sqrt{x}}{\mathrm{e}^x - 1} = \frac{x^2 + \sqrt{x}}{1 + x + \mathcal{O}(x^2) - 1} = \frac{x^2 + \sqrt{x}}{x + \mathcal{O}(x^2)} = \begin{bmatrix}\text{bryt ut domi-}\\ \text{nerande term}\end{bmatrix} =$$
$$= \frac{\sqrt{x}}{x}\,\frac{x\sqrt{x} + 1}{1 + \mathcal{O}(x)} = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{x}}}_{g(x)}\ \underbrace{\frac{x\sqrt{x} + 1}{1 + \mathcal{O}(x)}}_{h(x)\to 1 \text{ då } x \to 0^+}.$$

Med f, g, h enligt ovan så är förutsättningarna för SATS 10.13 uppfyllda. Enligt denna har konvergensfrågan för

$$\int_0^1 f(x)dx \quad \text{och} \quad \int_0^1 g(x)dx$$

samma svar. Enligt SATS 10.12 (b) med $\alpha = \dfrac{1}{2} < 1$ är svaret konvergent för $\displaystyle\int_0^1 \underbrace{\frac{1}{\sqrt{x}}}_{=g(x)} dx$ och därmed är också $\displaystyle\int_0^1 \underbrace{\frac{x^2 + \sqrt{x}}{\mathrm{e}^x - 1}}_{=f(x)} dx$ konvergent.

(b) Använd rotkriteriet (SATS10.9 (a), sid 450) på $a_k = \dfrac{(-1)^k x^k}{k5^k}$. Då fås

$$|a_k|^{1/k} = \left|\frac{(-1)^k x^k}{k5^k}\right|^{1/k} = \frac{|x|}{k^{1/k}5} \to \frac{|x|}{5} = Q$$

eftersom $k^{1/k} \to 1$ då $k \to \infty$ (standard). Enligt rotkriteriet är serien absolutkonvergent om $Q < 1$ och divergent om $Q > 1$, d v s absolutkonvergent om $|x| < 5$ och divergent om $|x| > 5$. Fallen $x = \pm 5$ undersöks separat.

$$\underline{\underline{x = 5}}: \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k 5^k}{k5^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$$

vilket är standardexemplet på en Leibnizkonvergent serie; serien är alternerande och termernas belopp $= \dfrac{1}{k}$ avtar mot 0 då $k \to \infty$.

$$\underline{\underline{x = -5}}: \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (-5)^k}{k5^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

vilket är standardexemplet på en serie som är divergent fast termerna $\to 0$ (SATS 10.5, sid 442 med $\alpha = 1$). Serien är alltså konvergent om $-5 < x \leq 5$ och divergent för övriga $x \in \mathbb{R}$.

Svar: (a) konvergent, (b) konvergent för $-5 < x \leq 5$.

5. Med hjälp av logaritmlagarna kan vi skriva $f(x) = \ln(x/2) = \ln x - \ln 2$. Vi använder sedan Taylors formel för $x = 2$. Derivering och insättning av $x = 2$ ger

$$f(x) = \ln x - \ln 2, \qquad f'(x) = \frac{1}{x}, \qquad f''(x) = -\frac{1}{x^2}, \qquad f'''(x) = \frac{2}{x^3}$$
$$f(2) = 0, \qquad f'(2) = \frac{1}{2}, \qquad f''(2) = -\frac{1}{4}, \qquad f'''(\xi) = \frac{2}{\xi^3}$$

Taylors formel ger då

$$\begin{aligned} f(x) &= f(2) + f'(2)(x-2) + \frac{f''(2)}{2!}(x-2)^2 + \frac{f'''(\xi)}{3!}(x-2)^3 = \\ &= \frac{1}{2}(x-2) - \frac{1/4}{2}(x-2)^2 + \frac{2}{3!\xi^3}(x-2)^3 \end{aligned}$$

för något ξ mellan 2 och x. Då $\ln(3/2) = f(3)$ ger insättning av $x = 3$ att

$$\left|\ln\frac{3}{2} - \frac{3}{8}\right| = \left|\frac{1}{2}(3-2) - \frac{1}{8}(3-2)^2 + \frac{2}{3!\xi^3}(3-2)^3 - \frac{3}{8}\right| = \left|\frac{3}{8} + \frac{1}{3\xi^3} - \frac{3}{8}\right| = \frac{1}{3\xi^3}$$

för något ξ mellan 2 och $x = 3$, d v s $2 \leq \xi \leq 3$. Detta uttryck blir som störst då nämnaren är som minst, d v s

$$\left|\ln\frac{3}{2} - \frac{3}{8}\right| = \frac{1}{3\xi^3} \leq \frac{1}{3 \cdot 2^3} = \frac{1}{24}. \qquad VSB$$

6. Med $y = x$ fås $y' = 1$, $y'' = 0$ och insättning ger

$$x^2y'' - 4xy' + 4y = x^2 \cdot 0 - 4x + 4x = 0,$$

d v s $y = x$ löser ekvationen $x^2y'' - 4xy' + 4y = 0$, vilket skulle visas. Vi fortsätter genom att följa den i uppgiften givna instruktionen.

$$y = xz(x) \Longrightarrow y' = z + xz' \Longrightarrow y'' = z' + z' + xz'' = xz'' + 2z'.$$

Insättning av detta i ekvationen $x^2y'' - 4xy' + 4y = x^5\mathrm{e}^x$ ger då

$$\begin{aligned} x^2(xz'' + 2z') - 4x(xz' + z) + 4xz &= x^3z'' + 2x^2z' - 4x^2z' - 4xz + 4xz = \\ &= x^3z'' - 2x^2z' = x^5\mathrm{e}^x \end{aligned}$$

Om vi betraktar z' som den sökta funktionen i ekvationen ovan så är det en linjär ekvation av ordning 1 som vi kan lösa på vanligt sätt med integrerande faktor. Vi får

$$x^3z'' - 2x^2z' = x^5\mathrm{e}^x \overset{x>0}{\Longleftrightarrow} z'' - \frac{2}{x}z' = x^2\mathrm{e}^x, \quad I.F. = \mathrm{e}^{-2\ln x} = \frac{1}{x^2}$$

Multipliceras ekvationen med den integrerande faktorn fås

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2}x^2\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x = \frac{1}{x^2}\left(z'' - \frac{2}{x}z'\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^2}z'\right) \Longleftrightarrow \\ \Longleftrightarrow \frac{1}{x^2}z' = \mathrm{e}^x + A \Longleftrightarrow z' = x^2\mathrm{e}^x + Ax^2. \end{aligned}$$

Genom partiell integration fås

$$\begin{aligned} z &= \int z'\,dx = \int (x^2\mathrm{e}^x + Ax^2)dx = \frac{A}{3}x^3 + x^2\mathrm{e}^x - 2\int x\mathrm{e}^x dx = \\ &= Bx^3 + x^2\mathrm{e}^x - 2\left(x\mathrm{e}^x - \int \mathrm{e}^x dx\right) = Bx^3 + \mathrm{e}^x\left(x^2 - 2x + 2\right) + C, \\ y &= xz = Bx^4 + Cx + \mathrm{e}^x\left(x^3 - 2x^2 + 2x\right). \end{aligned}$$

Svar: $y = Bx^4 + Cx + \mathrm{e}^x\left(x^3 - 2x^2 + 2x\right)$

7. Börja med att skriva ut några termer ur de aktuella summorna.

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots,$$

$$S_1 = \sum_{k=1}^{1} a_k = a_1, \quad S_2 = \sum_{k=1}^{2} a_k = a_1 + a_2,$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n,$$

$$\sum_{k=2}^{\infty}\left(S_k^\alpha - S_{k-1}^\alpha\right) = (S_2^\alpha - S_1^\alpha) + (S_3^\alpha - S_2^\alpha) + (S_4^\alpha - S_3^\alpha) + \ldots.$$

Observera att $S_n > 0$ för alla $n \geq 1$ eftersom $a_1 > 0$ enligt förutsättningarna. Notera också att om $\alpha = 0$ så är alla termer i den sista serien $= 0$ och serien är därmed konvergent med värdet 0. Antag därför att i fortsättningen så är $\alpha \neq 0$.

Då $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ är en positiv divergent serie följer det att $S_n \to \infty$ då $n \to \infty$. Tittar vi närmare på den sista serien ser vi att det är en så kallad *teleskopsumma*. Studerar vi nu delsummorna i den aktuella serien fås

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{N} \left(S_k^\alpha - S_{k-1}^\alpha\right) &= \sum_{k=2}^{N} S_k^\alpha - \sum_{k=2}^{N} S_{k-1}^\alpha = \\ &= S_2^\alpha + S_3^\alpha + \ldots + S_{N-1}^\alpha + S_N^\alpha - \left(S_1^\alpha + S_2^\alpha + \ldots + S_{N-1}^\alpha\right) = \\ &= S_N^\alpha - S_1^\alpha = S_N^\alpha - a_1^\alpha.\end{aligned}$$

Då $S_N \to \infty$ då $N \to \infty$ följer det att

$$S_N^\alpha \to \begin{cases} \infty & \text{om} \quad \alpha > 0, \\ 0 & \text{om} \quad \alpha < 0, \end{cases}$$

d v s för att delsummorna skall ha ett gränsvärde (vilket är definitionen av konvergens) krävs $\alpha < 0$. Gränsvärdet blir då $-a_1^\alpha$.

Svar: Serien $\sum_{k=2}^{N} \left(S_k^\alpha - S_{k-1}^\alpha\right)$ konvergerar mot $-a_1^\alpha$ då $\alpha < 0$, mot 0 om $\alpha = 0$ och är divergent om $\alpha > 0$.