TATA42 Envariabelanalys 2 2020-08-29 fm., lösningsförslag

1. Linjär differentialekvation av ordning ett. Eftersom $1+x^2 \neq 0$ för alla $x \in \mathbb{R}$ får vi

$$\text{(DE)}\quad (1+x^2)y' - 2xy = x + x^3 \qquad \Leftrightarrow \qquad y' - \frac{2x}{1+x^2}\,y = x.$$

Integrerande faktor $= e^{F(x)}$, där $F(x)$ är någon primitiv till $f(x) = -2x/(1+x^2)$; vi kan välja $F(x) = -\ln(1+x^2)$ och få $e^{F(x)} = 1/(1+x^2)$. Alltså:

$$\begin{aligned}\text{(DE)} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{1+x^2}\,y' - \frac{2x}{(1+x^2)^2}\,y = \frac{x}{1+x^2} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{y}{1+x^2}\right)' = \frac{x}{1+x^2}\\ &\Leftrightarrow \quad \frac{y}{1+x^2} = \int \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\,\ln(1+x^2) + C.\end{aligned}$$

Bivillkoret $y(0)=1$ ger $1/(1+0^2) = (1/2)\ln(1+0^2) + C$, alltså $C=1$, och löser vi sedan ut y får vi svaret nedan.

<u>Svar</u>: $y = \dfrac{1+x^2}{2}\,\ln(1+x^2) + 1 + x^2.$

2. (a) Eftersom nämnaren $= x^2$ utvecklar vi täljaren t.o.m. grad 2. Med standardutvecklingar får vi

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2} = 1 + \frac{x}{2} + \binom{1/2}{2}x^2 + \mathcal{O}(x^3) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \mathcal{O}(x^3)$$

och

$$\begin{aligned}\frac{\cos x + e^x - 2\sqrt{1+x}}{x^2} &= \frac{1}{x^2}\Big(\big(1 - \frac{x^2}{2!} + \mathcal{O}(x^4)\big) + \big(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \mathcal{O}(x^3)\big) - \big(2 + x - \frac{x^2}{4} + \mathcal{O}(x^3)\big)\Big)\\ &= \frac{x^2/4 + \mathcal{O}(x^3)}{x^2} = \frac{1}{4} + \mathcal{O}(x) \to \frac{1}{4} + 0 = \frac{1}{4} \quad \text{då } x \to 0.\end{aligned}$$

(b) Nämnaren $= x - \arctan x = x - (x - x^3/3 + \mathcal{O}(x^5)) = x^3/3 + \mathcal{O}(x^5)$, så vi utvecklar täljaren t.o.m. grad 3. Eftersom $\ln(1+t) = t + \mathcal{O}(t^2)$ blir, med $t = -2x$, $\ln(1-2x) = -2x + \mathcal{O}(x^2)$, så

$$\frac{x^2\ln(1-2x)}{x - \arctan x} = \frac{-2x^3 + \mathcal{O}(x^4)}{x^3/3 + \mathcal{O}(x^5)} = \frac{-2 + \mathcal{O}(x)}{1/3 + \mathcal{O}(x^2)} \to \frac{-2+0}{1/3+0} = -6 \quad \text{då } x \to 0.$$

(c) Med bytet $x = 1+t$, så att $t \to 0$ då $x \to 1$, får vi

$$\begin{aligned}\frac{\sin \pi x}{x - \sqrt[3]{x}} &= \frac{\sin(\pi + \pi t)}{(1+t) - \sqrt[3]{1+t}} = \frac{-\sin \pi t}{(1+t) - (1 + t/3 + \mathcal{O}(t^2))} = -\frac{\pi t + \mathcal{O}(t^3)}{2t/3 + \mathcal{O}(t^2)}\\ &= -\frac{\pi + \mathcal{O}(t^2)}{2/3 + \mathcal{O}(t)} \to -\frac{\pi + 0}{2/3 + 0} = -\frac{3\pi}{2} \quad \text{då } t \to 0, \text{ d.v.s. då } x \to 1.\end{aligned}$$

<u>Svar</u>: (a) $\dfrac{1}{4}$ (b) -6 (c) $-\dfrac{3\pi}{2}$.

3. (a) Med $a_k = (k+1)/(k^2-k)$ får vi, för $k \geq 2$,

$$0 \leq a_k = \frac{k+1}{k^2-k} = \frac{1}{k}\cdot\frac{1+1/k}{1-1/k}.$$

Sätter vi nu $b_k = 1/k$ får vi $b_k \geq 0$ för $k \geq 2$ och

$$\frac{a_k}{b_k} = \frac{1+1/k}{1-1/k} \to 1 = A \quad \text{då } k \to \infty.$$

Eftersom $0 < A < \infty$ och $\sum_{k=2}^{\infty} b_k = \sum_{k=2}^{\infty}(1/k)$ är divergent är också $\sum_{k=2}^{\infty} a_k$ divergent, enligt jämförelsesatsen på kvotform för positiva serier.

<u>Svar</u>: Divergent.

(b) Sätt $f(x) = (\cos x)/(x^2+1)$. Eftersom

$$\int_{-\infty}^{\infty} \bigl|f(x)\bigr|\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\cos x|}{x^2+1}\,dx \le \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+1}\,dx = \bigl[\arctan x\bigr]_{x\to-\infty}^{x\to\infty} = \pi$$

är $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ absolutkonvergent, och därmed konvergent.

Svar: Konvergent.

(c) Eftersom

$$0 \le \frac{1}{x^2+x^{11}} \le \frac{1}{x^{11}} \quad \text{då } x > 1$$

får vi

$$0 \le \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2+x^{11}} \le \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{11}} = \int_1^{\infty} x^{-11}\,dx = \left[\frac{x^{-10}}{-10}\right]_1^{x\to\infty} = \frac{1}{10},$$

vilket skulle bevisas.

4. Karakteristiska polynomet $p(r) = 4r^3 - 3r + 1 = (r+1)(4r^2-4r+1) = (r+1)(2r-1)^2$ har nollställena $r_1 = -1$, $r_2 = r_3 = 1/2$, där $r_1 = -1$ fås genom prövning. Homogenlösningen blir därför

$$y_h = A\,e^{-x} + (B + Cx)\,e^{x/2}.$$

För att finna en partikulärlösning y_p ansätter vi $y_p = ax^2 + bx + c$. Då blir $y_p' = 2ax + b$, $y_p'' = 2a$ och $y_p''' = 0$, och $4y_p''' - 3y_p' + y_p = 4\cdot 0 - 3(2ax+b) + (ax^2+bx+c) = ax^2 + (b-6a)x + (c-3b)$, som blir lika med $x^2 - 6x + 4$ för alla x om $a = 1$, $b - 6a = -6$ och $c - 3b = 4$, d.v.s. om $a = 1$, $b = 0$ och $c = 4$. Således duger $y_p = x^2 + 4$.

Den allmänna lösningen blir därför $y = y_h + y_p = A\,e^{-x} + (B + Cx)\,e^{x/2} + x^2 + 4$, och kravet $y(0) = 1$ ger slutligen $A + B + 4 = 1$, d.v.s. $B = -A - 3$.

Svar: $y = A\,e^{-x} + (Cx - A - 3)\,e^{x/2} + x^2 + 4$.

5. Sätt $f(t) = \sin t$. Då är $f'(t) = \cos t$, $f''(t) = -\sin t$, $f'''(t) = -\cos t$, $f^{(4)}(t) = \sin t$ och $f^{(5)}(t) = \cos t$, så $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 0$, $f'''(0) = -1$, $f^{(4)}(0) = 0$ och $f^{(5)}(\xi) = \cos\xi$. Maclaurinutveckling ger

$$\sin t = f(t) = f(0) + f'(0)t + \frac{f''(0)}{2!}t^2 + \frac{f'''(0)}{3!}t^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}t^4 + \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}t^5 = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{\cos\xi}{5!}t^5$$

för något $\xi = \xi(t)$ mellan 0 och t. Sätter vi här $t = x^3$ får vi alltså

$$(*) \qquad \sin(x^3) = x^3 - \frac{x^9}{6} + \frac{\cos\xi}{120}x^{15} \quad \text{för något } \xi = \xi(x) \text{ mellan 0 och } x^3.$$

Således blir, med $p(x) = x^3 - x^9/6$,

$$\bigl|\sin(x^3) - p(x)\bigr| = \left|\sin(x^3) - \left(x^3 - \frac{x^9}{6}\right)\right| = \left|\frac{\cos\xi}{120}x^{15}\right| = \frac{|\cos\xi|}{120}|x|^{15} \le \frac{1}{120}|x|^{15}, \quad x \in \mathbb{R},$$

så med detta val av $p(x)$ uppfylls den önskade olikheten.

Med hjälp av $(*)$ får vi nu

$$I = \underbrace{\int_0^1 \sin(x^3)\,dx}_{\text{Exakt värde}} = \underbrace{\int_0^1 \left(x^3 - \frac{x^9}{6}\right)dx}_{\text{Approximation}} + \underbrace{\int_0^1 \frac{\cos\xi(x)}{120}x^{15}\,dx}_{\text{Approximationsfel}} = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^{10}}{60}\right]_0^1 + \text{felet} = \frac{7}{30} + \text{felet},$$

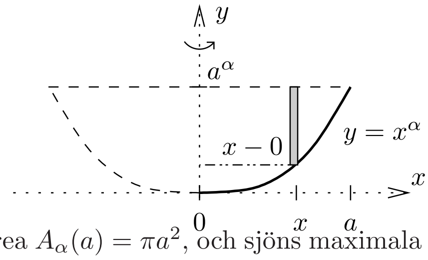
så

$$\left|I - \frac{7}{30}\right| = \bigl|\text{felet}\bigr| = \left|\int_0^1 \frac{\cos\xi(x)}{120}x^{15}\,dx\right| \le \int_0^1 \left|\frac{\cos\xi(x)}{120}x^{15}\right|dx$$

$$\le \int_0^1 \frac{|x|^{15}}{120}\,dx = \int_0^1 \frac{x^{15}}{120}\,dx = \left[\frac{x^{16}}{120\cdot 16}\right]_0^1 = \frac{1}{120\cdot 16} \le \frac{1}{1000}.$$

Svar: $p(x) = x^3 - \dfrac{x^9}{6}$; närmevärde $= \dfrac{7}{30}$.

6. När stapeln vid x i figuren roteras ett varv runt y-axeln (d.v.s. linjen $x = 0$) genereras ett tunt rör (cylindriskt skal) med omkrets $2\pi(x-0)$, höjd $a^\alpha - x^\alpha$ och tjocklek dx; röret har därför volym $dV(x) = 2\pi(x-0)(a^\alpha - x^\alpha)\,dx$, så sjöns volym blir



$$\begin{aligned} V_\alpha(a) &= \int_0^a dV(x) = \int_0^a 2\pi(x-0)(a^\alpha - x^\alpha)\,dx \\ &= 2\pi\left[a^\alpha \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{x^{\alpha+2}}{\alpha+2}\right]_0^a = \pi a^{\alpha+2}\left(1 - \frac{2}{\alpha+2}\right). \end{aligned}$$

Vattenytan är en cirkelskiva med radie $a-0$ och har därför area $A_\alpha(a) = \pi a^2$, och sjöns maximala djup är $d_\alpha(a) = a^\alpha - 0$, så

$$\frac{V_\alpha(a)}{A_\alpha(a)\cdot d_\alpha(a)} = 1 - \frac{2}{\alpha+2} = \frac{\alpha}{\alpha+2} \quad \text{oberoende av } a > 0.$$

Svar: Värdet $\dfrac{\alpha}{\alpha+2}$ är det enda som antas.

7. Vi följer ledningen och partialbråksuppdelar $1/(k^4+k^2+1)$. Faktorisering i andragradsfaktorer ger $k^4+k^2+1 = (k^2+k+1)(k^2-k+1)$, och som i Envariabelanalys 1 (redovisa detaljerna!) får vi

$$\frac{1}{k^4+k^2+1} = \frac{1}{(k^2+k+1)(k^2-k+1)} = \frac{k+1}{2(k^2+k+1)} - \frac{k-1}{2(k^2-k+1)}.$$

Låt s_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$, vara delsummor till den givna serien. Då blir

$$\begin{aligned} 2s_n &= \sum_{k=0}^{n} \frac{2}{k!(k^4+k^2+1)} = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k+1}{k!(k^2+k+1)} - \frac{k-1}{k!(k^2-k+1)}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k+1}{k!(k^2+k+1)} + \frac{n+1}{n!(n^2+n+1)} + 1 - \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{k!(k^2-k+1)}}_{\text{Byt } k \text{ mot } k+1 \text{ här}} \\ &= \frac{n+1}{n!(n^2+n+1)} + 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{\left(\frac{k+1}{k!(k^2+k+1)} - \frac{k}{(k+1)!(k^2+k+1)}\right)}_{\text{Slå ihop, förenkla}} \\ &= \frac{n+1}{n!(n^2+n+1)} + 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(k+1)!} = \frac{n+1}{n!(n^2+n+1)} + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \\ &\to 0 + e = e \end{aligned}$$

då $n \to \infty$, så $s_n \to e/2$ då $n \to \infty$; seriens summa är alltså $e/2$.

Svar: $\dfrac{e}{2}$.