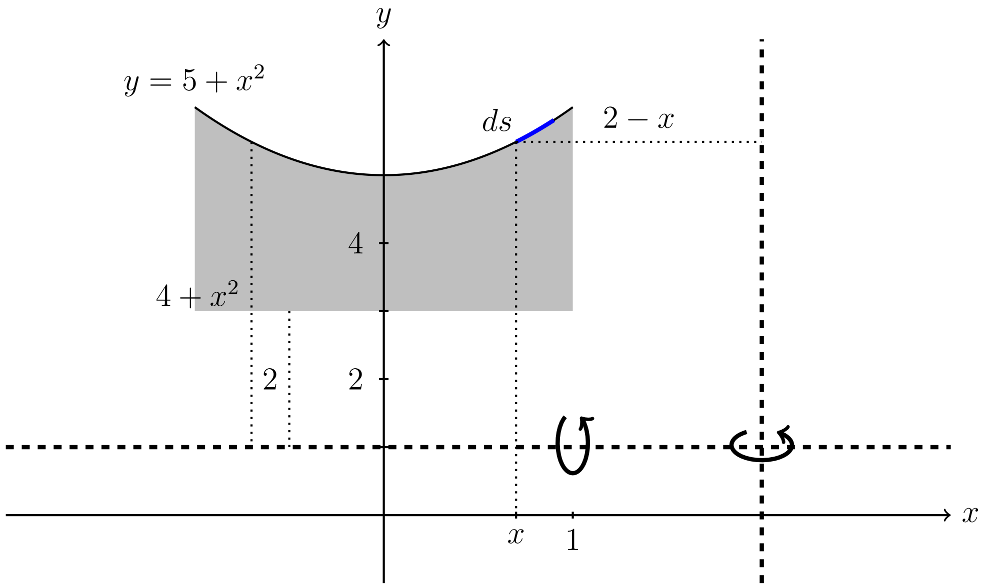
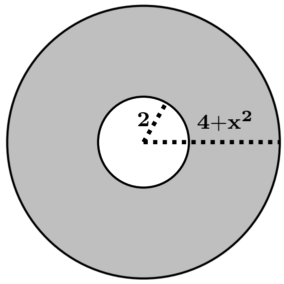
Lösningsförslag envariabelanalys 2 2020-10-21

1. Vi börjar med att rita en figur.



(a) Rotationsvolymen som uppstår då området $3 \leq y \leq 5 + x^2$, $-1 \leq x \leq 1$, roterar ett varv kring $y = 1$ kan beräknas med hjälp av skivformeln enligt

Ett tvärsnitt vid x:



$$\pi \int_{-1}^{1} \left((5 + x^2 - 1)^2 - (3 - 1)^2\right) dx$$
$$= \pi \int_{-1}^{1} \left((4 + x^2)^2 - 4\right) dx$$
$$= \pi \int_{-1}^{1} \left(x^4 + 8x^2 + 12\right) dx.$$

(b) Bågelementet finner vi enligt

$$ds = \sqrt{1 + y'(x)^2}\, dx = \sqrt{1 + (2x)^2}\, dx = \sqrt{1 + 4x^2}\, dx.$$

Kurvlängden av $y = 5 + x^2$ då $-1 \leq x \leq 1$ blir därmed

$$L = \int_{-1}^{1} ds(x) = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + 4x^2}\, dx.$$

(c) Avståndet från bågelementet $ds(x)$ till rotationsaxeln $x = 2$ ges av $2 - x$, så rotationsarean blir

$$2\pi \int_{-1}^{1} (2 - x)\, ds(x) = 2\pi \int_{-1}^{1} (2 - x)\sqrt{1 + 4x^2}\, dx.$$

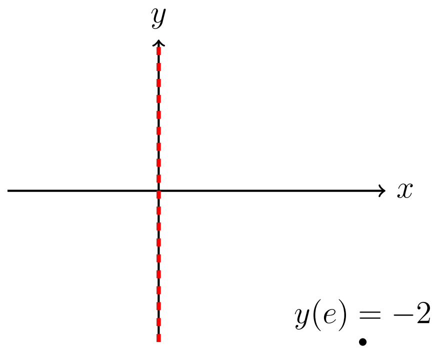
Svar: (a) $\pi \int_{-1}^{1} \left(x^4 + 8x^2 + 12\right) dx$ (b) $\int_{-1}^{1} \sqrt{1 + 4x^2}\, dx$ (c) $2\pi \int_{-1}^{1} (2 - x)\sqrt{1 + 4x^2}\, dx$.

2. Eftersom ekvationen är separabel så gäller att

$$yy' = \frac{1}{x} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y^2}{2} = C + \ln|x| \quad \Leftrightarrow \quad y^2 = 2C + \ln(x^2),$$

så länge $x \neq 0$, där C är en godtycklig konstant.

Om $x = 0$ är uttrycket i ekvationen odefinierat. Vi ritar en figur för att få en bild över hur villkoren kommer att påverka. Den rödmarkerade streckade linjen markerar den naturliga avgränsningen i uppgiften.



Om $y(e) = -2$ så måste

$$(-2)^2 = 2C + 2\ln e = 2C + 2 \quad \Leftrightarrow \quad C = 1.$$

Vi söker därmed y så att

$$y^2 = 2C + \ln(x^2) \quad \Leftrightarrow \quad y = \pm\sqrt{2 + \ln(x^2)},$$

vilket går bra om

$$2 + \ln(x^2) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln|x| \geq -1 \quad \Leftrightarrow \quad |x| \geq e^{-1}.$$

Vi vet att $y(e) = -2$, så vi måste välja den negativa lösningen. Dessutom är $e > e^{-1}$, så $x > e^{-1}$ är också nödvändigt. Den eftersöka lösningen är således

$$y = -\sqrt{2 + \ln(x^2)}, \quad x > e^{-1}.$$

Notera att vi väljer ett *öppet* intervall.

Svar: (a) $y = -\sqrt{2 + \ln(x^2)}$, $x > e^{-1}$.

3. (a) Vi börjar med att betrakta nämnaren där standardutvecklingarna

$$\sin u = u + O(u^3) \qquad \text{och} \qquad \ln(1+s) = s + O(s^2),$$

visar att

$$\sin(\ln(1+s)) = s + O(s^2) + O\left(\left(s + O(s^2)\right)^3\right) = s + O(s^2)$$

så med $s = x^2$ blir

$$\sin(\ln(1+x^2)) = x^2 + O(x^4).$$

För täljaren ser vi att

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + O(t^4)$$

så med $t = 2x$ erhåller vi att

$$\frac{\cos 2x - 1}{\sin(\ln(1+x^2))} = \frac{-2x^2 + O(x^4)}{x^2 + O(x^4)} = \frac{-2 + O(x^2)}{1 + O(x^2)} \to -2, \quad \text{då } x \to 0.$$

(b) Standardutvecklingarna

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + O(t^3) \quad \text{och} \quad \sqrt{1+s} = 1 + \frac{s}{2} - \frac{1}{8}s^2 + O(s^3)$$

visar att, med $t = \dfrac{1}{2x}$ och $s = \dfrac{1}{x}$,

$$\begin{aligned} x^2\left(e^{\frac{1}{2x}} - \sqrt{1+\frac{1}{x}}\right) &= x^2\left(1 + \frac{1}{2x} + \frac{1}{8x^2} + O\left(\frac{1}{x^3}\right) - 1 - \frac{1}{2x} + \frac{1}{8x^2} + O\left(\frac{1}{x^3}\right)\right) \\ &= x^2\left(\frac{2}{8}\cdot\frac{1}{x^2} + O\left(\frac{1}{x^3}\right)\right) = \frac{1}{4} + O\left(\frac{1}{x}\right) \to \frac{1}{4}, \end{aligned}$$

då $x \to \infty$.

(c) Vi börjar med att Taylorutveckla e^{3x} kring $x = 1$:

$$e^{3x} = e^{3(x-1)}\cdot e^3 = e^3\left(1 + 3(x-1) + \frac{(3(x-1))^2}{2} + O((x-1)^3)\right).$$

Eftersom $2 - 3x = -1 - 3(x-1)$ så gäller att

$$\frac{e^{3x} + e^3(2-3x)}{(x-1)^2} = \frac{e^3(3(x-1))^2/2 + O((x-1)^3)}{(x-1)^2} = \frac{9e^3}{2} + O(x-1) \to \frac{9e^3}{2}$$

då $x \to 1$.

Svar: (a) -2 (b) $\dfrac{1}{4}$ (c) $\dfrac{9e^3}{2}$.

4. (a) Eftersom

$$\frac{k-2}{k+7} = \frac{1-2/k}{1+7/k} \to 1 \neq 0$$

då $k \to \infty$ så är serien divergent enligt divergenstestet (för att kunna ha konvergens är det *nödvändigt* att termerna går mot noll).

(b) Vi observerar först att integranden för $x > 0$ kan skrivas

$$\frac{\sqrt{x}}{\arctan(4x)} = \frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\underbrace{\frac{4x}{\arctan(4x)}\cdot\frac{1}{4}}_{\to 1/4 \text{ då } x\to 0}.$$

Eftersom integranden är positiv för $x > 0$ och $\dfrac{1}{4} > 0$ så följer det av en jämförelsesats att

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\arctan(4x)}\,dx \text{ är konvergent} \quad \Leftrightarrow \quad \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx \text{ är konvergent.}$$

Nu vet vi (känd jämförelsefunktion) att

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx \text{ är konvergent,}$$

så integralen given i uppgiften är därmed konvergent.

(c) Vi ser att

- Termerna $(-1)^k \sin(1/k)$ alternerar tecken $- \ + \ - \ + \ - \ \cdots$ för $k = 1, 2, 3, \ldots$ (eftersom $\sin(1/k) > 0$ för $k = 1, 2, \ldots$).
- Termernas belopp $|(-1)^k \sin(1/k)| = \sin(1/k)$ är monotont avtagande då $k \to \infty$ (eftersom $\sin x$ är växande för $0 < x < 1$).
- Termerna går mot noll, dvs $(-1)^k \sin(1/k) \to 0$ då $k \to \infty$.

Eftersom termernas belopp i denna alternerande serie avtar mot noll följer det att serien är konvergent enligt Leibniz kriterium.

Svar: (a) divergent (b) konvergent (c) konvergent.

5. Potensserien $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ har en konvergensradie R. Antag att $R > 0$ och att $|x| < R$. Då gäller att

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} \quad \text{och} \quad y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) c_{n+2} x^n.$$

Eftersom

$$x^2 y(x) = x^2 \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+2} = \sum_{n=2}^{\infty} c_{n-2} x^n$$

så gäller då att

$$\begin{aligned} y''(x) - x^2 y(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) c_{n+2} x^n - \sum_{n=2}^{\infty} c_{n-2} x^n \\ &= 2c_2 + 6c_3 x + \sum_{n=2}^{\infty} (n+2)(n+1) c_{n+2} x^n - \sum_{n=2}^{\infty} c_{n-2} x^n \\ &= 2c_2 + 6c_3 x + \sum_{n=2}^{\infty} \big((n+2)(n+1) c_{n+2} - c_{n-2}\big) x^n. \end{aligned}$$

Villkoren $y(0) = 0$ och $y'(0) = 1$ i uppgiften ger att $c_0 = 0$ och $c_1 = 1$. Vi vill nu lösa $y'' - x^2 y = 2 + 6x$, så entydigheten för potensserieutvecklingar innebär att $2c_2 = 2$, $6c_3 = 6$ och

$$(n+2)(n+1) c_{n+2} - c_{n-2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad c_{n+2} = \frac{c_{n-2}}{(n+2)(n+1)} \quad \text{för } n \geq 2. \tag{1}$$

Alltså måste $c_2 = c_3 = 1$ samt

$$c_4 = \frac{c_0}{4 \cdot 3} = 0, \qquad c_5 = \frac{c_1}{5 \cdot 4} = \frac{1}{20}, \qquad c_6 = \frac{c_2}{6 \cdot 5} = \frac{1}{30}.$$

Eftersom vi endast har rekursionsformeln att arbeta med för att finna konvergensradien så delar vi upp den absolutkonvergenta serien (för $|x| < R$) i fyra delar:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} c_{4n} x^{4n}}_{=0} + \sum_{n=0}^{\infty} c_{4n+1} x^{4n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_{4n+2} x^{4n+2} + \sum_{n=0}^{\infty} c_{4n+3} x^{4n+3}.$$

Vi finner konvergensradier för dessa serier genom att betrakta kvottestet för $\sum_{n=0}^{\infty} c_{4n+k}x^{4n+k}$ då $k = 1, 2, 3$:

$$\left|\frac{c_{4(n+1)+k}x^{4(n+1)+k}}{c_{4n+k}x^{4n+k}}\right| = |x|^4 \left|\frac{c_{4n+k+4}}{c_{4n+k}}\right|.$$

Om vi låter $m = 4n + k + 2$ så blir detta uttryck enligt (1)

$$|x|^4 \left|\frac{c_{m+2}}{c_{m-2}}\right| = |x|^4 \cdot \frac{1}{(m+2)(m+1)} \to 0$$

då $m \to \infty$ (vilket är ekvivalent med att $n \to \infty$). Alltså blir konvergensradien oändlig för samtliga "delserier" och därmed även för $y(x)$.

Svar: $c_0 = 0$, $c_1 = c_2 = c_3 = 1$, $c_4 = 0$, $c_5 = 1/20$ samt $c_6 = 1/30$. Konvergensradien är oändlig.

6. Låt $f(t) = \sin t + e^t$. Då är $f'(t) = \cos t + e^t$ och $f''(t) = -\sin t + e^t$, vilket visar att

$$f(t) = f(0) + f'(0)t + \frac{f''(\xi)}{2}t^2 = 1 + 2t + \frac{e^\xi - \sin\xi}{2}t^2,$$

där ξ är något tal mellan 0 och t. Således gäller

$$\sin(x^2) + e^{x^2} = 1 + 2x^2 + r(x),$$

där

$$r(x) = \frac{e^\xi - \sin\xi}{2}x^4,$$

för något ξ mellan 0 och x^2. För $0 \le x \le 1/2$ så kommer

$$|r(x)| = \frac{\left|e^\xi - \sin\xi\right|}{2}x^4 \le \frac{e^{1/4}+1}{2}x^4 \le \frac{3^{1/4}+1}{2}x^4 \le \frac{3}{2}x^4$$

då $0 \le \xi \le x^2 \le 1/4$ och $3^{1/4} < 2$ (eftersom $3 < 2^4 = 16$). Från detta följer att

$$\int_0^{1/2}\left(\sin x^2 + e^{x^2}\right)dx = \underbrace{\int_0^{1/2}\left(1+2x^2\right)dx}_{\text{approximation}} + \underbrace{\int_0^{1/2} r(x)\,dx}_{\text{fel}},$$

där

$$\int_0^{1/2}\left(1+2x^2\right)dx = \left[x + \frac{2x^3}{3}\right]_0^{1/2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{12} = \frac{7}{12}$$

och

$$\left|\int_0^{1/2} r(x)\,dx\right| \le \int_0^{1/2}|r(x)|\,dx \le \int_0^{1/2}\frac{3x^4}{2}\,dx = \left[\frac{3x^5}{10}\right]_0^{1/2} = \frac{3}{320} < \frac{1}{100}.$$

Talet q ges alltså av $q = 7/12$ och felet är mindre än $1/100$.

Svar: $q = 7/12$.

7. Antag att $n > 1$. Om vi låter $y(x) = f(x^n)$ så ser vi att

$$y'(x) = nx^{n-1}f'(x^n) \quad \text{och} \quad y''(x) = n(n-1)x^{n-2}f'(x^n) + (nx^{n-1})^2 f''(x^n).$$

Genom att sätta in detta i ekvationen så ser vi att just $n = 3$ ger att

$$xy''(x) - 2y'(x) + 9x^5 y(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 9x^5(f''(x^3) + f(x^3)) = 0,$$

under förutsättning att $x > 0$ eller $x < 0$. Ekvivalensen följer av att funktionen $x \mapsto x^3$ är snäll (i meningen deriverbar) och inverterbar med snäll invers om $x < 0$ eller $x > 0$. Vi observerar att när $x = 0$ så är ekvationen alltid uppfylld (detta ger även att $y'(0) = 0$ är ett villkor som redan finns "inbakat" i ekvationen). Låt nu $t = x^3$. Om $x < 0$ eller $x > 0$ så måste

$$f''(t) + f(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(t) = A \sin t + B \cos t$$

då $p(r) = r^2 + 1 = (r + i)(r - i)$ är det karakteristiska polynomet.

På grund av kravet att $x \neq 0$ så måste vi vara försiktiga när vi är på olika sidor $x = 0$. Därför har alla lösningar formen $y(x) = A \sin x^3 + B \cos x^3$ för $x > 0$ och $y(x) = a \sin x^3 + b \cos x^3$ för $x < 0$. Eftersom vi söker lösningar av minst klass C^2 så innebär det att lösningarna är kontinuerliga och därmed att

$$0 = y(0) = \lim_{x \to 0^+} y(x) = \lim_{x \to 0} \left(A \sin x^3 + B \cos x^3\right) = B$$

och på samma sätt att $b = 0$. Vi finner därmed att om $x > 0$ så måste $y(x) = A \sin x^3$ för något $A \in \mathbf{R}$ och om $x < 0$ så måste $y(x) = a \sin x^3$ för något $a \in \mathbf{R}$. Vi söker *alla* lösningar definierade på $\mathbf{R}$ av klass C^2 respektive C^3, så detta kan ställa krav på a och A. Låt $y(x) = a \sin x^3$ för $x < 0$, $y(0) = 0$ och $y(x) = A \sin x^3$ för $x > 0$. För $x \neq 0$ så är $y \in C^\infty$ med

$$y(x) = \begin{cases} a \sin x^3, & x < 0, \\ A \sin x^3, & x > 0, \end{cases} \qquad y'(x) = \begin{cases} 3x^2 a \cos x^3, & x < 0, \\ 3x^2 A \cos x^3, & x > 0, \end{cases}$$

$$y''(x) = \begin{cases} 6ax \cos x^3 - 9ax^4 \sin x^3, & x < 0, \\ 6Ax \cos x^3 - 9Ax^4 \sin x^3, & x > 0, \end{cases}$$

samt

$$y'''(x) = \begin{cases} 6a \cos x^3 - 54ax^3 \sin x^3 - 27ax^6 \cos x^3, & x < 0, \\ 6A \cos x^3 - 54Ax^3 \cos x^3 - 27Ax^6 \cos x^3, & x > 0. \end{cases}$$

Vi ser att $y'(0) = y''(0) = 0$ är nödvändigt för att lösningen ska kunna vara C^2 (vänster- och högergränsvärden måste stämma överens i noll och vara lika med funktionsvärdet där). En direkt kontroll med hjälp av gränsvärdesdefinitionen för derivata visar att även (något som inte är helt självklart) vänster- och högerderivatorna för y och y' existerar när $x = 0$:

$$y'_+(0) = y'_-(0) = y''_+(0) = y''_-(0) = 0.$$

Av denna anledning så ges samtliga C^2-lösningar till ekvationen av

$$y(x) = \begin{cases} a \sin x^3, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ A \sin x^3, & x > 0, \end{cases}$$

för alla $a, A \in \mathbf{R}$.

Om vi vill att lösningen ska vara av klass C^3 så är $y'''(0^+) = y'''(0^-)$ nödvändigt och vi ser att

$$\lim_{x \to 0^-} y'''(x) = 6a \quad \text{och} \quad \lim_{x \to 0^+} y'''(x) = 6A,$$

så det är alltså *nödvändigt* att $a = A$ för att y''' ska vara kontinuerlig. Låt därför $a = A$ så att $y(x) = A \sin x^3$ för alla x. Samtliga lösningar av klassen C^3 ges alltså av detta uttryck.

Svar: Alla C^2-lösningar ges av

$$y(x) = \begin{cases} a \sin x^3, & x \leq 0, \\ A \sin x^3, & x > 0, \end{cases}$$

där $a, A \in \mathbf{R}$ är godtyckliga konstanter. För att $y \in C^3$ måste även $a = A$.