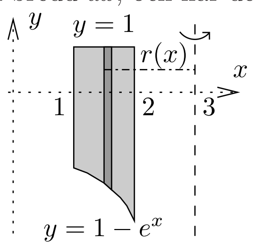
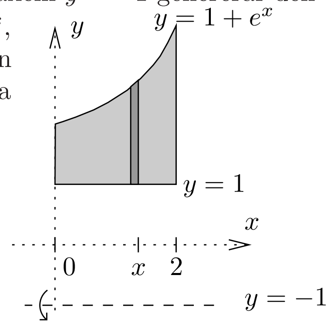
**TATA42 Envariabelanalys 2 2021-03-20 em., lösningsförslag**

1. (a) Den mörkare tunna stapeln vid $x$ har höjd $1-(1-e^x)=e^x$ och bredd $dx$, och när den roterar ett varv kring axeln $x=3$ genererar den ett tunt rör med radie $r(x)=3-x$ och volym $dV(x)=2\pi(3-x)e^x\,dx$. När hela området roterar genereras därför en kropp med volym




$$V=\int_1^2 dV(x)=\int_1^2 2\pi(3-x)e^x\,dx.$$

(b) När den mörkare tunna stapeln vid $x$ roterar ett varv kring axeln $y=-1$ genererar den en cirkelring med ytterradie $R(x)=(1+e^x)-(-1)=2+e^x$, innerradie $r(x)=1-(-1)=2$ och tjocklek $dx$, och cirkelringen har därför volym $dV(x)=\big(\pi R(x)^2-\pi r(x)^2\big)\,dx$. När hela området roterar genereras därför en kropp med volym




$$V=\int_0^2 dV(x)=\int_0^2 \pi\big((2+e^x)^2-2^2\big)\,dx$$
$$=\int_0^2 \pi(4\,e^x+e^{2x})\,dx.$$

(c) Bågelementet $ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}=\sqrt{1+(dy/dx)^2}\,dx=\sqrt{1+(2\cos 2x)^2}\,dx=ds(x)$, ty $x$ växer, så kurvans längd $L$ blir

$$L=\int_2^6 ds(x)=\int_2^6 \sqrt{1+4\cos^2 2x}\;dx.$$

2. Karakteristiskt polynom $r^3+r^2+9r+9=(r+1)(r^2+9)$, med nollställena $r_1=-1$, $r_{2,3}=\pm 3i$. Homogenlösningen blir därför

$$y_h=A\,e^{-x}+B\cos 3x+C\sin 3x.$$

För att finna en partikulärlösning $y_p$ ansätter vi $y_p=z\,e^{-x}$ och får successivt $y_p'=(z'-z)\,e^{-x}$, $y_p''=(z''-2z'+z)\,e^{-x}$ och $y_p'''=(z'''-3z''+3z'-z)\,e^{-x}$, varför

$$y_p'''+y_p''+9y_p'+9y_p=(z'''-2z''+10z')\,e^{-x}=x\,e^{-x}$$

om $z'''-2z''+10z'=x$. Vi söker *en* sådan funktion $z_p$, och ansatsen $z_p=ax^2+bx$ ger successivt $z_p'=2ax+b$, $z_p''=2a$ och $z_p'''=0$, så

$$z_p'''-2z_p''+10z_p'=(20a)x+(10b-4a)=x$$

uppfylls om $20a=1$ och $10b-4a=0$, d.v.s. om $a=1/20$ och $b=1/50$; således duger $z_p=x^2/20+x/50$ och därmed blir $y_p=(x^2/20+x/50)\,e^{-x}$.

Alla lösningar ges av $y=y_h+y_p=(A+x/50+x^2/20)\,e^{-x}+B\cos 3x+C\sin 3x$.

<u>Svar</u>: $y=\left(A+\dfrac{x}{50}+\dfrac{x^2}{20}\right)e^{-x}+B\cos 3x+C\sin 3x.$

3. I intervallet $|x| < \pi/2$ ger derivering

$$f(x) = \tan x, \quad f'(x) = 1 + \tan^2 x, \quad f''(x) = (2\tan x)(1 + \tan^2 x),$$

så

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 1, \quad f''(\xi) = 2\tan\xi + 2\tan^3\xi.$$

Maclaurinutvecklingen av ordning 1 ges av

$$\tan x = f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(\xi)}{2!}x^2 = x + (\tan\xi + \tan^3\xi)\,x^2$$

för något $\xi = \xi(x)$ mellan 0 och $x$, så länge som $|x| < \pi/2$.

När $|x| \leq \pi/4$ måste $|\xi| \leq \pi/4$ och därmed måste också $|\tan\xi| \leq 1$, så

$$\begin{aligned}\bigl|\tan x - x\bigr| &= \bigl|(\tan\xi + \tan^3\xi)\,x^2\bigr| = \bigl|(\tan\xi + \tan^3\xi)\bigr||x|^2 \leq \bigl(|\tan\xi| + |\tan\xi|^3\bigr)|x|^2 \\ &\leq (1 + 1^3)|x|^2 = 2|x|^2\end{aligned}$$

vilket skulle bevisas.

4. Eftersom $x^2 + 1 \neq 0$ och $y^2 + 1 \neq 0$ får vi, genom att separera variablerna,

$$\begin{aligned}(x^2+1)y' = 2xy^2 + 2x = 2x(y^2+1) \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{y'}{y^2+1} = \frac{2x}{x^2+1} \quad \Leftrightarrow \quad \int \frac{dy}{y^2+1} = \int \frac{2x}{x^2+1}\,dx \\ &\Leftrightarrow \quad \arctan y = \ln(x^2+1) + C.\end{aligned}$$

Villkoret $y(0) = 1$ ger $\arctan 1 = \ln(0^2 + 1) + C$, alltså $C = \pi/4$, så

$$y = \tan\left(\frac{\pi}{4} + \ln(x^2+1)\right)$$

i något öppet intervall kring $x = 0$; vi ska nu bestämma det största möjliga öppna intervallet.

Sätt $z(x) = \pi/4 + \ln(x^2+1)$, så att $y(x) = \tan\bigl(z(x)\bigr)$. Trivialt är $z(x) \geq \pi/4$, med likhet då $x = 0$. Vi ska därför hitta det största intervallet kring $x = 0$ där $z(x) < \pi/2$, vilket är ekvivalent med att

$$\ln(x^2+1) < \frac{\pi}{4} \quad \Leftrightarrow \quad x^2 < e^{\pi/4} - 1 \quad \Leftrightarrow \quad |x| < \sqrt{e^{\pi/4} - 1}.$$

<u>Svar</u>: $y = \tan\left(\frac{\pi}{4} + \ln(x^2+1)\right),\ |x| < \sqrt{e^{\pi/4} - 1}.$

5. (a) Sätt $a_k = (k^2+k+2)x^k/4^k$ för fixt $x \neq 0$. Eftersom

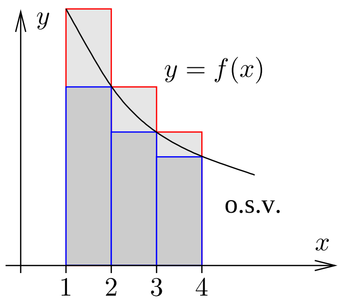
$$\sqrt[k]{|a_k|} = \frac{|x|}{4}\exp\left(\frac{\ln(k^2+k+2)}{k}\right) = \frac{|x|}{4}\exp\left(\frac{2\ln k + \ln(1+1/k+2/k^2)}{k}\right)$$
$$\to \frac{|x|}{4}\exp 0 = \frac{|x|}{4} = Q$$

då $k \to \infty$, och potensserien enligt rotkriteriet konvergerar då $Q < 1$, d.v.s. då $|x| < 4$, och divergerar då $Q > 1$, d.v.s. då $|x| > 4$, inser vi att konvergensradien $R = 4$.

(Observera att vi endast frågade efter konvergensradien – inte efter de $x$ för vilka potensserien konvergerar – så huruvida potensserien konvergerar i $\pm 4$ är ointressant i sammanhanget.)

Svar: 4.

(b) Eftersom funktionen $f(x) = 1/x^{3/2}$ är positiv och avtagande i intervallet $[1, \infty[$ får vi genast med areauppskattning (se figur, där de första staplarna med höjder $f(1)$, $f(2)$ och $f(3)$ respektive $f(2)$, $f(3)$ och $f(4)$ är inritade) olikheterna




$$\int_1^\infty f(x)\,dx \leq \sum_{k=1}^{\infty} f(k) = f(1) + \sum_{k=2}^{\infty} f(k) \leq f(1) + \int_1^\infty f(x)\,dx,$$

d.v.s.

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^{3/2}}\,dx \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{3/2}} \leq \frac{1}{1^{3/2}} + \int_1^\infty \frac{1}{x^{3/2}}\,dx,$$

och en enkel uträkning med primitiv funktion ger

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^{3/2}}\,dx = \int_1^\infty x^{-3/2}\,dx = \left[\frac{x^{-1/2}}{-1/2}\right]_1^\infty = 2,$$

så

$$2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{3/2}} \leq 1 + 2 = 3,$$

vilket skulle bevisas.

6. Sätt $t = 1/x$. Att $x \to \infty$ medför att $t \to 0^+$, och eftersom $\arctan(1/t) = \pi/2 - \arctan t$ då $t > 0$ (syns omedelbart i en rätvinklig triangel med kateterna 1 och $t$, rita figur!) ger standardutvecklingar i steg $*$ nedan

$$x^3\left(a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2} - \ln\frac{x}{x-1} - \arctan x\right) = \frac{1}{t^3}\left(a + bt + ct^2 - \ln\frac{1/t}{1/t-1} - \arctan\frac{1}{t}\right)$$
$$= \frac{1}{t^3}\left(a + bt + ct^2 + \ln(1-t) - \frac{\pi}{2} + \arctan t\right)$$
$$\overset{*}{=} \frac{1}{t^3}\left(a + bt + ct^2 + \left(-t - \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3} + \mathcal{O}(t^4)\right) - \frac{\pi}{2} + \left(t - \frac{t^3}{3} + \mathcal{O}(t^5)\right)\right)$$
$$= \frac{1}{t^3}\left(\left(a - \frac{\pi}{2}\right) + bt + \left(c - \frac{1}{2}\right)t^2 - \frac{2}{3}t^3 + \mathcal{O}(t^4)\right).$$

Gränsvärdet existerar ändligt då $t \to 0^+$ endast om den ledande termen i parentesen i sista ledet ovan har grad $\geq 3$, d.v.s. endast om $a = \pi/2$, $b = 0$ och $c = 1/2$. Med dessa värden får vi kvar

$$\frac{1}{t^3}\left(-\frac{2}{3}t^3 + \mathcal{O}(t^4)\right) = -\frac{2}{3} + \mathcal{O}(t) \to -\frac{2}{3}$$

då $t \to 0^+$, d.v.s. då $x \to \infty$.

Svar: $a = \pi/2$, $b = 0$, $c = 1/2$; gränsvärdet blir $-2/3$.

7. Eftersom

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin nx}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin nx|}{n^2} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

och $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ är konvergent följer det att $\sum_{n=1}^{\infty} (\sin nx)/n^2$ är absolutkonvergent för alla $x \in \mathbb{R}$, så $f$ är en väldefinierad funktion på $\mathbb{R}$.

För att visa att $f$ är kontinuerlig tar vi ett godtyckligt $a \in \mathbb{R}$; vi ska visa att det till varje $\epsilon > 0$ finns ett $\delta > 0$ sådant att $|f(x) - f(a)| < \epsilon$ närhelst $|x - a| < \delta$.

För varje heltal $N \geq 1$ får vi

$$\begin{aligned} |f(x) - f(a)| &= \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin na}{n^2} \right| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx - \sin na}{n^2} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin nx - \sin na|}{n^2} \\ &= \sum_{n=1}^{N} \frac{|\sin nx - \sin na|}{n^2} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{|\sin nx - \sin na|}{n^2} \leq |x - a| \cdot \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{2}{n^2}, \end{aligned}$$

där den sista olikheten beror på att $\sin nx - \sin na = (\cos \xi)(nx - na)$ för något $\xi$ mellan $na$ och $nx$ (medelvärdessatsen tillämpad på $g(t) = \sin t$) och därmed

$$|\sin nx - \sin na| = |\cos \xi| \cdot |nx - na| \leq n|x - a|,$$

samt att, med triangelolikheten,

$$|\sin nx - \sin na| \leq |\sin nx| + |\sin na| \leq 1 + 1 = 2.$$

Tag nu $\epsilon > 0$. Eftersom $\sum_{n=1}^{\infty} 2/n^2$ är en positiv konvergent serie kan vi välja $N$ så stort att svansen $\sum_{n=N+1}^{\infty} 2/n^2 < \epsilon/2$, och sedan, med detta $N$, välja $\delta > 0$ så litet att $\delta \cdot \sum_{n=1}^{N} 1/n < \epsilon/2$. Om $|x - a| < \delta$ följer det nu att

$$|f(x) - f(a)| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon,$$

vilket skulle bevisas.