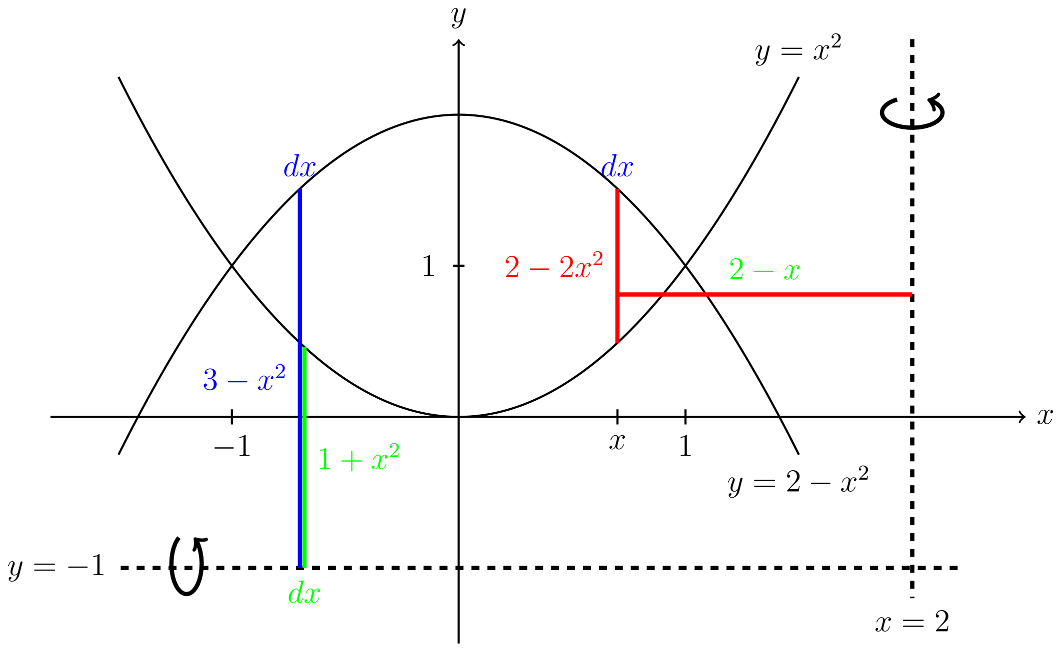
Lösningsförslag envariabelanalys 2 2021-03-20, 8-13

1. Vi börjar med en tydlig figur.



Skärningspunkterna mellan kurvorna fås genom att lösa ekvationen

$$2 - x^2 = x^2 \iff 2x^2 = 2 \iff x = \pm 1.$$

Då kurvorna skär varann i $x = \pm 1$ blir det aktuella integrationsintervallet, i båda fallen, $-1 \leq x \leq 1$.

(a) Betrakta den högra delen av figuren. Rörformeln ger då att remsan med längd $2 - x^2 - x^2 = 2 - 2x^2$, tjocklek dx och på avstånd $2 - x$ från rotationsaxeln ger ett tunt rör med volymen

$$dV = \text{omkrets} \cdot \text{höjd} \cdot \text{tjocklek} = 2\pi(2 - x)(2 - 2x^2)dx = 4\pi(2 - x)(1 - x^2)dx$$

$$V = \int dV = 4\pi \int_{-1}^{1} (2 - x)(1 - x^2)dx = 4\pi \int_{-1}^{1} \left(2 - 2x^2 - x\left(1 - x^2\right)\right) dx =$$

$$= 4\pi \left[2x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{4}\left(1 - x^2\right)^2\right]_{-1}^{1} = 4\pi \left(2 - \frac{2}{3} - \left(-2 + \frac{2}{3}\right)\right) = \frac{32\pi}{3}$$

(b) För rotationsvolymen runt $y = -1$ tillämpar vi skivformeln. Den blå remsan har längd

$$2 - x^2 - (-1) = 3 - x^2$$

och blir radie i den tunna skiva som genereraras då remsan roterar ett varv runt $y = -1$. Den skiva som den blå remsan ger får då volymen

$$dV_1 = \pi(\text{radien})^2 \cdot \text{tjocklek} = \pi \left(3 - x^2\right)^2 dx.$$

Den gröna remsan har längden $x^2 - (-1) = 1 + x^2$ och ger på samma sätt upphov till volymselementet

$$dV_2 = \pi \left(1 + x^2\right)^2 dx.$$

Den sökta rotationsvolymen fås då genom integration av

$$
\begin{aligned}
dV &= dV_1 - dV_2 = \pi\left(\left(3-x^2\right)^2 - \left(1+x^2\right)^2\right) = \left[\text{konjugatregeln}\right] = \\
&= \pi\left(3-x^2-\left(1+x^2\right)\right)\left(3-x^2+\left(1+x^2\right)\right) = \pi\left(2-2x^2\right)4 = 8\pi\left(1-x^2\right), \\
V &= \int dV = 8\pi\int_{-1}^{1}\underbrace{\left(1-x^2\right)}_{\text{jämn}}dx = 16\pi\int_0^1\left(1-x^2\right)dx = 16\pi\left[x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \\
&= 16\pi\left(1-\frac{1}{3}\right) = \frac{32\pi}{3}
\end{aligned}
$$

2. Ekvationen har det karakteristiska polynomet och karakteristiska ekvationen

$$P(r) = r^4 - 1 = (r^2-1)(r^2+1) = 0 \iff r = \pm 1, \pm i$$

vilket ger att lösningen till den homogena ekvationen är

$$y_h = C_1\mathrm{e}^x + C_2\mathrm{e}^{-x} + C_3\sin x + C_4\cos x.$$

Då ekvationen är linjär kan vi bestämma partikulärlösningen y_p som summan av lösningarna till

$$P(D)y_{p_1} = \sin 2x \quad \text{respektive} \quad P(D)y_{p_2} = \mathrm{e}^x.$$

Eftersom $D^4\sin 2x = 2^4\sin 2x$ inses att vi inte behöver någon $\cos 2x$-term i ansatsen och vi får

$$P(D)\sin 2x = 16\sin 2x - \sin 2x = 15\sin 2x,$$

d.v.s. $\frac{1}{15}\sin 2x$ är *en* lösning till $P(D)y = \sin 2x$, d.v.s. vi kan välja $y_{p_1} = \frac{1}{15}\sin 2x$.
Då e^x är en lösning till den homogena ekvationen ansätter vi $y_{p_2} = \mathrm{e}^x z(x)$ och utnyttjar förskjutningsregeln. Vi får

$$
\begin{aligned}
&P(D)y_{p_2} = P(D)(\mathrm{e}^x z) = \mathrm{e}^x P(D+1)z = \mathrm{e}^x \iff \\
\iff\ &P(D+1)z = \left((D+1)^4-1\right)z = \left(D^4+4D^3+6D^2+4D+1-1\right)z = \\
&= \left(D^4+4D^3+6D^2+4D\right)z = z^{(4)} + 4z''' + 6z'' + 4z' = 1.
\end{aligned}
$$

Här ser vi att $z = \frac{1}{4}x$ är *en* lösning och vår ansats ger $y_{p_2} = \mathrm{e}^x z = \frac{x}{4}\mathrm{e}^x$. Vi får

$$y = y_h + y_{p_1} + y_{p_2} = \left(C_1 + \frac{x}{4}\right)\mathrm{e}^x + C_2\mathrm{e}^{-x} + C_3\sin x + C_4\cos x + \frac{1}{15}\sin 2x$$

3. (a) Vi sätter $t = \frac{1}{x}$. Då $x \to \infty$ följer det att $t = \frac{1}{x} \to 0^+$. Maclaurinutveckling ger då

$$
\begin{aligned}
x^2\left(e^{1/x^2} - \cos(1/x)\right) &= \frac{\mathrm{e}^{t^2} - \cos t}{t^2} = \frac{1 + t^2 + \mathcal{O}\left(t^4\right) - \left(1 - \frac{1}{2}t^2 + \mathcal{O}\left(t^4\right)\right)}{t^2} = \\
&= \frac{\frac{3}{2}t^2 + \mathcal{O}\left(t^4\right)}{t^2} = \frac{3}{2} + \mathcal{O}\left(t^2\right) \to \frac{3}{2} \quad \text{då} \quad t \to 0^+
\end{aligned}
$$

(b) Maclaurinutveckling ger

$$
\begin{aligned}
&x - \arctan x = x - \left(x - \frac{1}{3}x^3 + \mathcal{O}\left(x^5\right)\right) = \frac{1}{3}x^3 + \mathcal{O}\left(x^5\right), \\
&\sqrt[5]{1+x^3} - 1 = 1 + \frac{1}{5}x^3 + \mathcal{O}\left(x^6\right) - 1 = \frac{1}{5}x^3 + \mathcal{O}\left(x^6\right), \\
&\frac{\sqrt[5]{1+x^3}-1}{x - \arctan x} = \frac{\frac{1}{5}x^3 + \mathcal{O}\left(x^6\right)}{\frac{1}{3}x^3 + \mathcal{O}\left(x^5\right)} = \frac{x^3\left(\frac{1}{5} + \mathcal{O}\left(x^3\right)\right)}{x^3\left(\frac{1}{3} + \mathcal{O}\left(x^2\right)\right)} \to \frac{3}{5} \quad \text{då} \quad x \to 0
\end{aligned}
$$

(c) Maclaurinutveckling till ordning 4 ger

$$3\mathrm{e}^{x^2} = 3\left(1 + x^2 + \frac{1}{2}x^4 + \mathcal{O}\left(x^6\right)\right) = 3 + 3x^2 + \frac{3}{2}x^4 + \mathcal{O}\left(x^6\right),$$

$$-3x\sin x = -3x\left(x - \frac{1}{6}x^3 + \mathcal{O}\left(x^5\right)\right) = -3x^2 + \frac{1}{2}x^4 + \mathcal{O}\left(x^6\right),$$

$$-2x^3\ln(1+x) = -2x^3\left(x + \mathcal{O}\left(x^2\right)\right) = -2x^4 + \mathcal{O}\left(x^5\right),$$

$$f(x) = 3 + 3x^2 + \frac{3}{2}x^4 - 3x^2 + \frac{1}{2}x^4 - 2x^4 + \mathcal{O}\left(x^5\right) = 3 + \mathcal{O}\left(x^5\right)$$

vilket betyder att vi utvecklat för kort. Då de första två utvecklingarna är av ordning 5 (eftersom resttermen blev av ordning 6) för båda räcker det att utveckla den sista ett steg till, d.v.s.

$$-2x^3\ln(1+x) = -2x^3\left(x - \frac{1}{2}x^2 + \mathcal{O}\left(x^3\right)\right) = -2x^4 + x^5 + \mathcal{O}\left(x^6\right)$$

$$f(x) = 3 + x^5 + \mathcal{O}\left(x^6\right) = 3 + x^5\left(1 + \mathcal{O}(x)\right).$$

Då $1 + \mathcal{O}(x) > 0$ om x litet och då x^5 är positivt om $x > 0$ och negativt om $x < 0$ betyder detta att $f(x) < 3$ om $x < 0$ och litet samt $f(x) > 3$ om $x > 0$ och litet. Följaktligen har $f(x)$ *inte* lokalt extremvärde i origo.

4. (a) Då integranden

$$f(x) = \frac{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}$$

är obegränsad nära 0^+ och då integrationsintervallet är obegränsat är integralen generaliserad i både 0 och ∞ och måste delas upp,

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}\,dx = \int_0^1 \frac{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}\,dx + \int_1^\infty \frac{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}\,dx$$

Då $x > 0$ och litet gäller att täljaren är nära 1. Jämför vi med $\frac{1}{\sqrt{x}}$ har vi

$$\frac{f(x)}{1/\sqrt{x}} = \sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x} \to 1 > 0 \quad \text{då} \quad x \to 0^+,$$

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx \quad \text{är konvergent} \quad \left(\alpha = \frac{1}{2} < 1\right)$$

så SATS 10.13 (Jämförelsesats II, jämförelse på kvotform), sid 458 ger att

$$\int_0^1 \frac{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}\,dx \quad \text{är konvergent.}$$

För stora x gäller

$$\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{x}\left(\sqrt[3]{1 + \frac{1}{x}} - 1\right) = x^{1/3}\left(1 + \frac{1}{3x} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^2}\right) - 1\right) =$$

$$= \frac{1}{3x^{2/3}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^{5/3}}\right),$$

$$f(x) = \frac{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}} = \frac{1}{x^{1/2}}\left(\frac{1}{3x^{2/3}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^{5/3}}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{x^{1/2+2/3}}\left(\frac{1}{3} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \frac{1}{x^{7/6}}\left(\frac{1}{3} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x}\right)\right).$$

Om vi då, på samma sätt som ovan, jämför med $1/x^{7/6}$ fås

$$\frac{f(x)}{1/x^{7/6}} = \frac{1}{3} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x}\right) \to \frac{1}{3} > 0 \quad \text{då} \quad x \to \infty,$$
$$\int_1^\infty \frac{1}{x^{7/6}}\,dx \quad \text{är konvergent} \quad \left(\alpha = \frac{7}{6} > 1\right)$$

så $\int_1^\infty f(x)dx$ är konvergent enligt samma sats som ovan. Då båda delintegralerna är konvergenta får vi att

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}\,dx \text{ är konvergent.}$$

(b) För stora k gäller

$$a_k = \frac{\sqrt{1+k^2}}{k^3 - 3k + 1} = \frac{k}{k^3} \cdot \frac{\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}}{1 - \frac{3}{k^2} + \frac{1}{k^3}} = \frac{1}{k^2} \cdot \underbrace{\frac{\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}}{1 - \frac{3}{k^2} + \frac{1}{k^3}}}_{\to 1}$$

Jämför vi med $b_k = 1/k^2$ har vi

$$\frac{a_k}{b_k} \to 1 \text{ då } k \to \infty, \quad \sum_{k=2}^\infty b_k \text{ är konvergent } (\alpha = 2 > 1)$$

så enligt samma sats som i (a) fast för serier får vi att

$$\sum_{k=2}^\infty \frac{\sqrt{1+k^2}}{k^3 - 3k + 1} \quad \text{är konvergent.}$$

5. Då vi skall ha restermen på Lagranges form är det enklast att derivera fram utvecklingen.

$$\begin{aligned}
f(x) &= \mathrm{e}^{-x}\sin x, & f(0) &= 0\\
f'(x) &= \mathrm{e}^{-x}(\cos x - \sin x), & f'(0) &= 1\\
f''(x) &= \mathrm{e}^{-x}(-\sin x - \cos x - (\cos x - \sin x)) = & f''(0) &= -2\\
&= \mathrm{e}^{-x}(-2\cos x) & &\\
f'''(x) &= \mathrm{e}^{-x}(2\sin x + 2\cos x), & f'''(0) &= 2\\
f^{(4)}(x) &= \mathrm{e}^{-x}(2\cos x - 2\sin x - (2\sin x + 2\cos x)) = & &\\
&= -4\mathrm{e}^{-x}\sin x = -4f(x), & f^{(4)}(\xi) &= -4\mathrm{e}^{-\xi}\sin\xi
\end{aligned}$$

Maclaurinutvecklingen med resterm på Lagranges form blir då

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}x^4 =\\
&= x + \frac{-2}{2}x^2 + \frac{2}{3!}x^3 - \frac{4\mathrm{e}^{-\xi}\sin\xi}{4!}x^4 =\\
&= x - x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{\mathrm{e}^{-\xi}\sin\xi}{6}x^4.
\end{aligned}$$

Insättning av $x = 1/2$ ger då

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \mathrm{e}^{-1/2}\sin(1/2) = \frac{\sin(1/2)}{\sqrt{\mathrm{e}}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3{\cdot}8} - \frac{\mathrm{e}^{-\xi}\sin\xi}{6{\cdot}2^4} = \frac{7}{24} - \frac{\mathrm{e}^{-\xi}\sin\xi}{96}$$

för något ξ mellan 0 och 1/2. Följaktligen gäller

$$\left|\frac{\sin(1/2)}{\sqrt{\mathrm{e}}} - \frac{7}{24}\right| = \left|-\frac{\mathrm{e}^{-\xi}\sin\xi}{96}\right| = \frac{\mathrm{e}^{-\xi}\sin\xi}{96}$$

för något ξ mellan 0 och 1/2.

Eftersom

$$0 \leq \xi \leq \frac{1}{2}, \quad \mathrm{e}^{-\xi} \text{ avtar} \quad \text{och} \quad \sin\xi \text{ växer är}$$
$$0 < \mathrm{e}^{-\xi} \leq \mathrm{e}^0 = 1 \quad \text{och} \quad 0 \leq \sin\xi \leq \sin\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}$$

eftersom $\sin t \leq t$ om $t \geq 0$. Detta ger

$$\left|\frac{\sin(1/2)}{\sqrt{\mathrm{e}}} - \frac{7}{24}\right| = \frac{\mathrm{e}^{-\xi}\sin\xi}{96} \leq \frac{1/2}{96} = \frac{1}{192} \qquad \text{VSB.}$$

Anmärkning: Approximationen är faktiskt mycket bättre än så. Då $f^{(4)}(x) = -4f(x)$ är

$$f^{(4)}(0) = -4f(0) = 0,$$
$$f^{(5)}(x) = -4f'(x) = -4\mathrm{e}^{-x}(\cos x - \sin x) = -4\sqrt{2}\mathrm{e}^{-x}\sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right),$$
$$\frac{\sin(1/2)}{\sqrt{\mathrm{e}}} = \frac{7}{24} - \frac{4\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\xi}\sin\left(\xi + \frac{3\pi}{4}\right)}{5!{\cdot}2^5} = \frac{7}{24} - \frac{\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\xi}\sin\left(\xi + \frac{3\pi}{4}\right)}{120{\cdot}2^3} =$$
$$= \frac{7}{24} - \frac{\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\xi}\sin\left(\xi + \frac{3\pi}{4}\right)}{960}$$

för något $\xi :\ 0 \leq \xi \leq 1/2$ vilket ger

$$\left|\frac{\sin(1/2)}{\sqrt{\mathrm{e}}} - \frac{7}{24}\right| = \frac{\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\xi}\left|\sin\left(\xi + \frac{3\pi}{4}\right)\right|}{960} \leq \frac{1}{960}$$

eftersom $\sin\left(\xi + \frac{3\pi}{4}\right)$ är avtagande då $0 \leq \xi \leq 1/2$ och därmed $\leq 1/\sqrt{2}$.

6. Vi börjar med att visa att problemet är meningsfullt, d.v.s. att serien är konvergent åtminstone för $x :\ -1 < x < 1$. Rotkriteriet ger

$$\left|\frac{(-1)^k}{k(k-1)}x^{2k}\right|^{1/k} = \frac{|x|^2}{(k(k-1))^{1/k}} = \frac{|x|^2}{(k^{1/k})^2((1-\frac{1}{k}))^{1/k}} \to |x|^2 = Q < 1$$

då $k \to \infty$. Följaktligen är seriens konvergensradie 1. Enligt SATS 10.16, sid 465 är den också deriverbar och vi får derivatan genom att derivera seriens termer, d.v.s.

$$y(x) = \sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k(k-1)}x^{2k},$$
$$y'(x) = \sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k 2k}{k(k-1)}x^{2k-1} = 2\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k-1}x^{2k-1} = 2\left(x^3 - \frac{1}{2}x^5 + \frac{1}{3}x^7 - \dots\right) =$$
$$= 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}x^{2k+1}.$$

Här har vi skrivit serien för y' på två olika sätt för att det skall bli enklare att använda i nästa steg.

$$
\begin{aligned}
(1+x^2)y'(x) &= 2\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}x^{2k+1} + x^2\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k-1}x^{2k-1}\right) = \\
&= 2\left(x^3 + \sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}x^{2k+1} + \sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k-1}x^{2k+1}\right) = \\
&= 2x^3 + 2\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)x^{2k+1} = \\
&= 2x^3 + 2\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k(k-1)}x^{2k+1} = 2x^3 + 2x\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k(k-1)}x^{2k} = 2x^3 + 2xy(x),
\end{aligned}
$$

d.v.s. $y(x)$ löser den givna ekvationen då $-1 < x < 1$. Insättning av $x = 0$ i serien ger $y(0) = 0$. Då ekvationen är linjär av första ordningen löser vi den med hjälp av integrerande faktor.

$$
\begin{aligned}
&(1+x^2)y' - 2xy = 2x^3 \iff y' - \frac{2x}{1+x^2}y = \frac{2x^3}{1+x^2}, \\
&-\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx = -\ln\left(1+x^2\right) \quad (+C) \implies \\
&\implies I.F = \mathrm{e}^{-\ln\left(1+x^2\right)} = \frac{1}{1+x^2} \implies \\
&\implies D\left(\frac{1}{1+x^2}y\right) = \frac{2x^3}{(1+x^2)^2} = \frac{2x(1+x^2-1)}{(1+x^2)^2} = \frac{2x}{1+x^2} - \frac{2x}{(1+x^2)^2} \implies \\
&\implies \frac{1}{1+x^2}y = \ln(1+x^2) + \frac{1}{1+x^2} + C \iff \\
&\iff y = (1+x^2)\ln(1+x^2) + C(1+x^2) + 1, \\
&y(0) = C + 1 = 0 \iff C = -1, \\
&y = (1+x^2)\ln(1+x^2) - (1+x^2) + 1 = (1+x^2)\ln(1+x^2) - x^2
\end{aligned}
$$

Eftersom både serien och denna funktion löser ekvationen och lösningen är entydig så gäller

$$
y = \sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k(k-1)}x^{2k} = (1+x^2)\ln(1+x^2) - x^2
$$

7. Vi använder partiell integration på seriens termer. Då fås

$$
\begin{aligned}
a_n &= \int_{n\pi}^{\infty}\frac{\sin t}{t}dt \overset{P.I.}{=} \left[-\frac{\cos t}{t}\right]_{n\pi}^{\infty} - \int_{n\pi}^{\infty}\frac{\cos t}{t^2}dt = \frac{\cos n\pi}{n\pi} - \left(\left[\frac{\sin t}{t^2}\right]_{n\pi}^{\infty} + 2\int_{n\pi}^{\infty}\frac{\sin t}{t^3}dt\right) = \\
&= \underbrace{\frac{(-1)^n}{n\pi}}_{b_n} - \underbrace{2\int_{n\pi}^{\infty}\frac{\sin t}{t^3}dt}_{c_n} = b_n - c_n.
\end{aligned}
$$

Då $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ är alternerande och $|b_n|$ avtar mot 0 då $n \to \infty$ är $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergent enligt Leibniz kriterium. Då c_n växlar tecken studerar vi

$$
|c_n| \le 2\int_{n\pi}^{\infty}\frac{|\sin t|}{t^3}dt \le 2\int_{n\pi}^{\infty}\frac{1}{t^3}dt = \left[-\frac{1}{t^2}\right]_{n\pi}^{\infty} = \frac{1}{n^2\pi^2}
$$

Då

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2\pi^2} = \frac{1}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

är konvergent ($\alpha = 2 > 1$) ger jämförelsesatsen att

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \quad \text{är absolutkonvergent och därmed konvergent.}$$

Följaktligen är

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n - \sum_{n=1}^{\infty} c_n \quad \text{konvergent (men inte absolutkonvergent).}$$