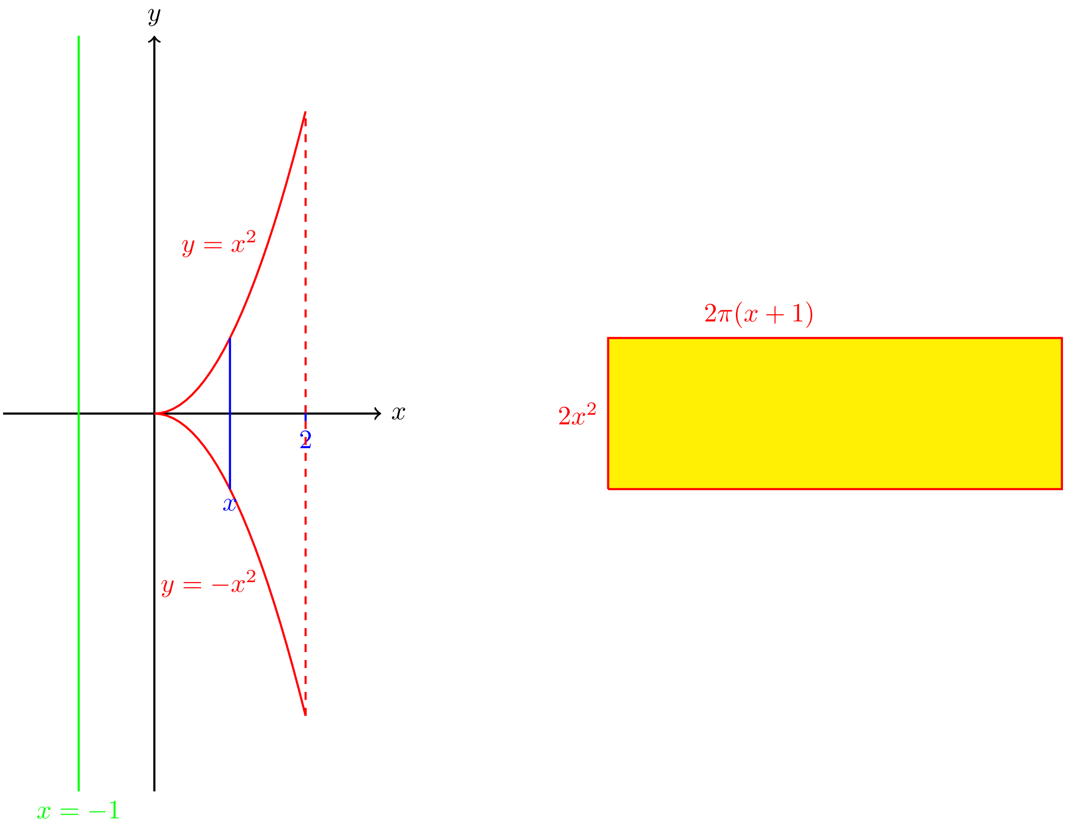
1 (a).

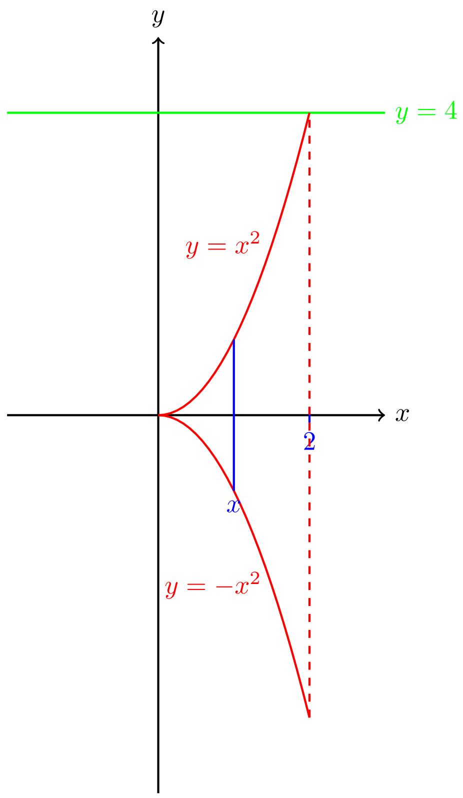


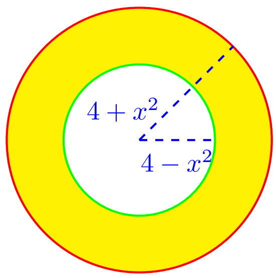
När den blå stolpen vid x roteras kring $x = -1$ uppstår en cylinder med omkrets $2\pi(x+1)$ (avståndet mellan x och linjen är $x+1$) och höjd $x^2 - (-x^2) = 2x^2$, som har area $2\pi \cdot 2x^2 \cdot (x+1) = 4\pi(x^3 + x^2)$. Volymen av rotationskroppen ges av att integrera denna tvärsnittsarea från 0 till 2:

$$\int_0^2 4\pi(x^3 + x^2)\, dx = 4\pi \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{80\pi}{3}.$$

Svar: $\frac{80\pi}{3}$.

1 (b).





När den blå stolpen i figuren mellan kurvorna $y = -x^2$ och $y = x^2$ roteras ett varv runt $y = 4$ uppstår en ihålig cirkelskiva med inre radie $4 - x^2$ och yttre radie $4 + x^2$. Denna har således area $\pi \cdot (4 + x^2)^2 - \pi \cdot (4 - x^2)^2 = 16\pi x^2$. Volymen av rotationskroppen ges av att integrera denna tvärsnittsarea från 0 till 2:

$$\int_0^2 16\pi x^2 \, dx = \pi \left[\frac{16x^3}{3} \right]_0^2 = \frac{128\pi}{3}.$$

Svar: $\frac{128\pi}{3}$.

2. Eftersom $r^3 - 2r^2 - 4r + 8 = (r - 2)^2(r + 2)$ har ekvationen $y''' - 2y'' - 4y' + 8y = 6e^x + 8$ allmän homogenlösning

$$y_h = Ae^{-2x} + (Bx + C)e^{2x}.$$

Vi skriver nu $y_p = y_1 + y_2$ där $y_1''' - 2y_1'' - 4y_1' + 8y_1 = 6e^x$ och $y_2''' - 2y_2'' - 4y_2' + 8y_2 = 8$, samt ser direkt att $y_2 = 1$ fungerar. För att hitta ett y_1 gör vi ansatsen $y_1 = ae^x$ (då 1 inte är en rot till den karaktäristiska ekvationen kan vi här ta a till konstant). Eftersom detta ger $y_1' = y_1'' = y_1''' = ae^x$ ger detta insatt i ekvationen

$$y_1''' - 2y_1'' - 4y_1' + 8y_1 = (a - 2a - 4a + 8a)e^x = 6e^x,$$

vilket ger $a = 2$.

Alltså är den allmänna lösningen

$$y = y_h + y_1 + y_2 = Ae^{-2x} + (Bx + C)e^{2x} + 2e^x + 1.$$

Bivillkoret $y(0) = 0$ ger nu

$$y(0) = A + C + 2 + 1 = 0 \Leftrightarrow C = -3 - A.$$

Svar: Allmän lösning $y = Ae^{-2x} + (Bx + C)e^{2x} + 2e^{2x} + 1$, och de som uppfyller $y(0) = 0$ ges av $y = Ae^{-2x} + (Bx - 3 - A)e^{2x} + 2e^x + 1$.

3 (a). Eftersom $\sin t = t - t^3/6 + \mathcal{O}(t^5)$ och $\arctan t = t - t^3/3 + \mathcal{O}(t^5)$ får vi

$$\begin{aligned}\frac{\sin(x^2) - \arctan(x^2)}{x^6} &= \frac{(x^2 - x^6/6 + \mathcal{O}(x^{10})) - (x^2 - x^6/3 + \mathcal{O}(x^{10}))}{x^6} \\ &= \frac{x^6/6 + \mathcal{O}(x^{10})}{x^6} = \frac{x^6(1/6 + \mathcal{O}(x^4))}{x^6} \to \frac{1}{6} \text{ då } x \to 0.\end{aligned}$$

Svar: 1/6.

3 (b). Eftersom $\sqrt{1+t} = 1 + t/2 + \mathcal{O}(t^2)$ och $\mathrm{e}^s = 1 + s + \mathcal{O}(s^2)$ får vi med variabelbytet $t = 1/x^3$ ($t \to 0^+ \Leftrightarrow x \to \infty$):

$$\begin{aligned}x^3\left(\mathrm{e}^{\sqrt{1+1/x^3}} - \mathrm{e}\right) &= \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{1+t}} - \mathrm{e}}{t} = \frac{\mathrm{e}^{1+t/2+\mathcal{O}(t^2)} - \mathrm{e}}{t} = \frac{\mathrm{e}(\mathrm{e}^{t/2+\mathcal{O}(t^2)} - 1)}{t} \\ &= \mathrm{e}\frac{t/2 + \mathcal{O}(t^2)}{t} = \mathrm{e}\frac{t(1/2 + \mathcal{O}(t))}{t} \to \frac{\mathrm{e}}{2} \text{ då } t \to 0^+.\end{aligned}$$

Svar: e/2.

3 (c). Eftersom $\cos s = 1 - s^2/2 + \mathcal{O}(s^4)$ och $\ln(1+t) = t - t^2/2 + \mathcal{O}(t^3)$ får vi med variabelbytet $x = 2 + t$ ($x \to 2 \Leftrightarrow t \to 0$):

$$\begin{aligned}\frac{\cos(\pi x) - 1}{\ln(x-1) + 2 - x} &= \frac{\cos(\pi(2+t)) - 1}{\ln((2+t) - 1) + 2 - (2+t)} = \frac{\cos(2\pi + \pi t) - 1}{\ln(1+t) - t} = \frac{\cos(\pi t) - 1}{\ln(1+t) - t} \\ &= \frac{(1 - (\pi t)^2/2 + \mathcal{O}(t^4)) - 1}{(t - t^2/2 + \mathcal{O}(t^3)) - t} = \frac{-\pi^2 t^2/2 + \mathcal{O}(t^4)}{-t^2/2 + \mathcal{O}(t^3)} = \frac{t^2(-\pi^2/2 + \mathcal{O}(t^2))}{t^2(-1/2 + \mathcal{O}(t))} \to \pi^2 \text{ då } t \to 0.\end{aligned}$$

Svar: π^2.

4. Derivation av ekvationen ger

$$\frac{d}{dx}\left(y(x) - \int_0^x 3t^2 y(t)dt\right) = y'(x) - 3x^2 y(x) = \frac{d}{dx}\left(2x^3 + 1\right) = 6x^2,$$

och $x = 0$ insatt i ekvationen ger

$$y(0) - \int_0^0 3t^2 y(t)dt = y(0) = 2 \cdot 0^3 + 1 = 1.$$

Differentialekvationen är linjär, och då $(-x^3)' = -3x^2$ är e^{-x^3} en integrerande faktor:

$$(\mathrm{e}^{-x^3} y)' = \mathrm{e}^{-x^3}(y' - 3x^2 y) = 6x^2 \mathrm{e}^{-x^3} \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-x^3} y = \int 6x^2 \mathrm{e}^{-x^3}\, dx = -2\mathrm{e}^{-x^3} + C.$$

Det vill säga allmänna lösningen till differentialekvationen är

$$y = -2 + C\mathrm{e}^{x^3}.$$

Bivillkoret ger nu

$$y(0) = -2 + C = 1, \text{ dvs } C = 3.$$

Svar: $y = 3\mathrm{e}^{x^3} - 2$.

5 (a).

$$\sqrt[k]{\left|\frac{\sin(1/k^2) x^{2k}}{3^k}\right|} = \frac{\sqrt[k]{\sin(1/k^2)}|x|^2}{3} \to \frac{|x|^2}{3} \text{ då } k \to \infty.$$

Detta ger konvergens då $|x|^2/3 < 1$ (dvs $-\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$) och divergens då $|x^2|/3 > 1$ enligt rotkriteriet.

I båda ändpunkterna $x = \pm\sqrt{3}$ får vi samma serie $\sum_{k=2}^{\infty} \sin(1/k^2)$, och då $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ är konvergent samt

$$\frac{\sin(1/k^2)}{1/k^2} \to 1 \text{ då } k \to \infty \quad (0 < 1 < \infty)$$

följer det av jämförelseprincipen på gränsvärdesform att serien även är konvergent i båda ändpunkterna.

(Att $\sqrt[k]{\sin(1/k^2)} \to 1$ kan ses t ex eftersom $1/2k^2 \le \sin(1/k^2) \le 1/k^2$ gäller för stora k, och vi vet att $\sqrt[k]{1/2k^2} \to 1$ och $\sqrt[k]{1/k^2} \to 1$.)

Svar: $-\sqrt{3} \le x \le \sqrt{3}$.

5 (b). Integralen är endast generaliserad i ∞. Vi börjar med att notera att eftersom $0 < 3/x \le 3 < \pi$ då $1 \le x < \infty$ så är integranden positiv på hela intervallet. Eftersom $\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx$ är divergent och

$$\frac{\sin(3/x)}{1/x} = \frac{3/x + \mathcal{O}(1/x^3)}{1/x} \to 3 \text{ då } x \to \infty \quad (0 < 3 < \infty),$$

så följer det av jämförelseprincipen på gränsvärdesform att integralen är divergent.

Svar: Divergent.

6. Med $f(t) = (1+t)^{1/5}$ får vi

$$f'(t) = \frac{1}{5}(1+t)^{-4/5},\ f''(t) = \frac{-4}{25}(1+t)^{-9/5},\ f'''(t) = \frac{36}{125}(1+t)^{-14/5},$$

så

$$f(t) = f(0) + f'(0)t + \frac{f''(0)}{2}t^2 + \frac{f'''(\xi(t))}{6}t^3 = 1 + \frac{1}{5}t - \frac{2}{25}t^2 + \frac{6}{125}(1+\xi(t))^{-14/5}t^3$$

för något $\xi(t)$ mellan 0 och t.

Alltså får vi

$$\int_1^2 \sqrt[5]{1+\sqrt{x-1}}\,dx = \int_0^1 \sqrt[5]{1+\sqrt{s}}\,ds = \int_0^1 f(\sqrt{s})\,ds$$
$$= \int_0^1 \left(1 + \frac{1}{5}\sqrt{s} - \frac{2}{25}s\right)\,ds + \int_0^1 \frac{6}{125}(1+\xi(\sqrt{s}))^{-14/5}s^{3/2}\,ds.$$

Eftersom $\xi(\sqrt{s})$ ligger mellan 0 och $\sqrt{s}$ gäller $0 \le \frac{6}{125}(1+\xi(\sqrt{s}))^{-14/5}s^{3/2} \le \frac{6}{125}s^{3/2}$ för alla s mellan 0 och 1. Alltså får vi

$$0 \le \int_0^1 \frac{6}{125}(1+\xi(\sqrt{s}))^{-14/5}s^{3/2}\,ds \le \int_0^1 \frac{6}{125}s^{3/2}\,ds = \ldots = \frac{12}{625} < \frac{1}{50},$$

och vi kan därför välja

$$q = \int_0^1 \left(1 + \frac{1}{5}\sqrt{s} - \frac{2}{25}s\right)\,ds = \ldots = \frac{82}{75}.$$

Svar: $q = 82/75$ fungerar till exempel.

7. Vi söker alltså de r sådant att det finns en funktion $f(x)$ som i formuleringen där

$$\int_0^s \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx = 2s^r \text{ för alla } s \in [0,1].$$

Vi kan börja med att notera att enda möjligheten är $r = 1$ här därför att vi har $1 \le \sqrt{1+f'(x)^2} \le C$ för alla $x \in [0,1]$, där C är det största värdet av den kontinuerliga funktionen $\sqrt{1+f'(x)^2}$ på intervallet $[0,1]$. Detta ger

$$s = \int_0^1 1\,dx \le \int_0^s \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx = 2s^r \le \int_0^1 C\,dx = Cs,$$

vilket vi ser genom att studera då $s \to 0$ bara kan gälla om $r = 1$. Derivation av ekvationen ger nu, då $r = 1$,

$$\sqrt{1+f'(s)^2} = 2,$$

vilket ger $f'(s)^2 = 3$. Denna har lösningarna $f'(s) = \pm\sqrt{3}$, och då $f'(s)$ ska vara kontinuerlig ser vi att enda möjligheten för en funktion att uppfylla integralekvationen är att antingen $f'(s) = \sqrt{3}$ eller $f'(s) = -\sqrt{3}$ för alla s. De funktioner som löser dessa är på formen $f(s) = \pm\sqrt{3}s + c$ för någon konstant c. Test direkt i ekvationen visar att alla dessa vidare uppfyller denna.

Svar: Lösningar finns enbart då $r = 1$, och dessa ges då av $f(s) = \pm\sqrt{3}s + c$, där c är en godtycklig konstant.