Lösningsförslag envariabelanalys 2 2021-03-21 8–13

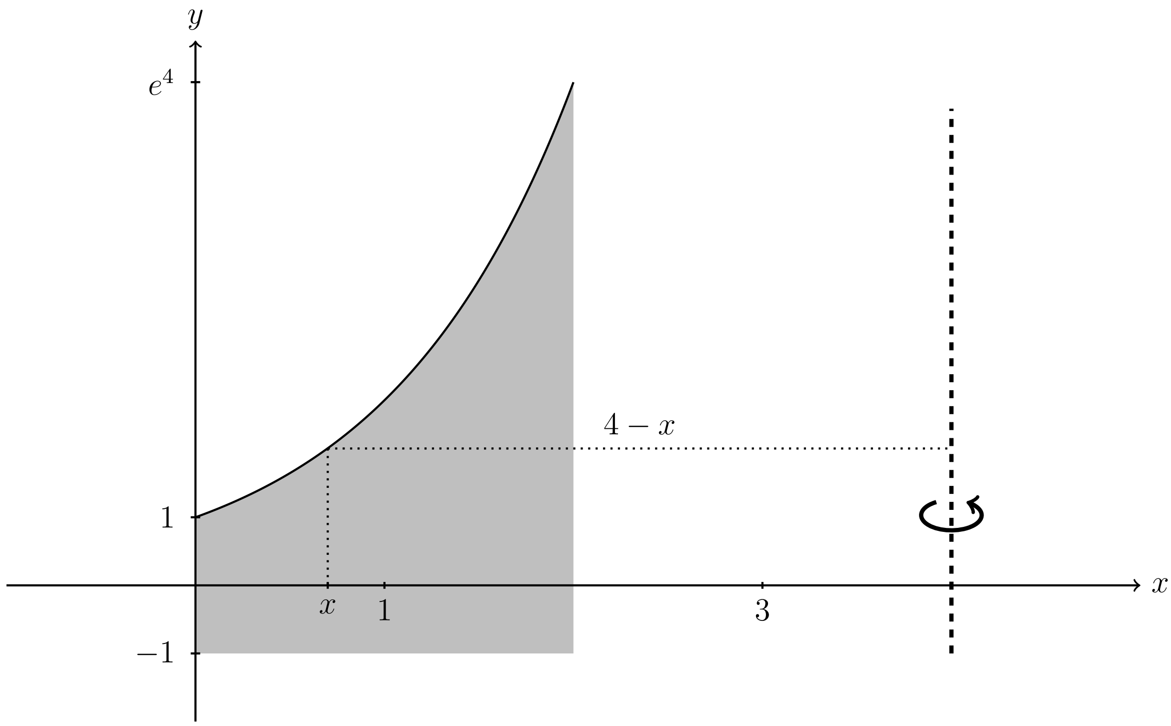
1. (a) Bågelementet finner vi enligt

$$ds = \sqrt{1 + y'(x)^2}\, dx = \sqrt{1 + (2e^{2x})^2}\, dx = \sqrt{1 + 4e^{4x}}\, dx$$

så kurvlängden av $y = e^{2x}$ då $0 \leq x \leq 2$ blir därmed

$$L = \int_0^2 ds(x) = \int_0^2 \sqrt{1 + 4e^{4x}}\, dx.$$

(b) Vi börjar med att rita en figur.



Vid rotation kring $x = 4$ så uppstår vid punkten x en cylinder som har radie $4 - x$ och höjd $e^{2x} - (-1) = e^{2x} + 1$. Genom att multiplicera mantelarean för denna cylinder med en liten tjocklek dx så erhåller vi volymselementen

$$dV(x) = 2\pi(4 - x)(e^{2x} + 1)\, dx.$$

Vi summerar volymselementen och ser att

$$\begin{aligned} V &= \int_0^2 dV(x) = 2\pi \int_0^2 (4 - x)(e^{2x} + 1)\, dx \\ &= 2\pi \left[(4 - x)\left(\frac{1}{2}e^{2x} + x\right)\right]_0^2 + 2\pi \int_0^2 \left(\frac{1}{2}e^{2x} + x\right)\, dx \\ &= 2\pi \left[(4 - x)\left(\frac{1}{2}e^{2x} + x\right) + \frac{1}{4}e^{2x} + \frac{x^2}{2}\right]_0^2 = 2\pi \left(\frac{15}{4} + \frac{5}{4}e^4\right) = \frac{5\pi}{2}\left(3 + e^4\right). \end{aligned}$$

Svar: (a) $\int_0^2 \sqrt{1 + 4e^{4x}}\, dx$ (b) $\frac{5\pi}{2}\left(3 + e^4\right)$.

2. (a) Låt $f(x) = e^{3x}$. Då blir $f'(x) = 3e^{3x}$, $f''(x) = 9e^{3x}$ och $f^{(3)}(x) = 27e^{3x}$. Taylors formel kring $x = 2$ – med restterm på Lagranges form – ger då att

$$\begin{aligned} f(x) &= f(2) + f'(2)(x-2) + \frac{f''(2)}{2}(x-2)^2 + \frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}(x-2)^3 \\ &= e^6 + 3e^6(x-2) + \frac{9e^6}{2}(x-2)^2 + \frac{9e^{3\xi}}{2}(x-2)^3 \end{aligned}$$

för något ξ mellan 2 och x.

(b) Vi behöver standardutvecklingarna

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + O(x^5), \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + O(x^4), \quad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + O(x^4),$$
$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + O(x^5) \qquad \text{och} \qquad \ln(1+s) = s + O(s^2).$$

Med hjälp av detta kan vi uttrycka täljaren som

$$1 - \frac{x^2}{2} + O(x^4) + x - \frac{x^3}{6} + O(x^5) + x^2 + O(x^4) - \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + O(x^4)\right) = -\frac{x^3}{3} + O(x^4)$$

och nämnaren som

$$x - \left(x - \frac{x^3}{3} + O(x^5)\right) = \frac{x^3}{3} + O(x^5),$$

vilket visar att

$$\frac{\cos x + \sin x + \ln(1+x^2) - e^x}{x - \arctan x} = \frac{-\frac{x^3}{3} + O(x^4)}{\frac{x^3}{3} + O(x^5)} = \frac{-1/3 + O(x)}{1/3 + O(x^2)} \to -1, \quad \text{då } x \to 0.$$

Svar: (a) $e^6 + 3e^6(x-2) + \frac{9e^6}{2}(x-2)^2 + \frac{9e^{3\xi}}{2}(x-2)^3$, ξ mellan 2 och x (b) -1.

3. Eftersom ekvationen är separabel så gäller att

$$\begin{aligned} (1+x^2)yy' = (1+y^2)x \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{y}{1+y^2}y' = \frac{x}{1+x^2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\ln(1+y^2) = C + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) \\ &\Leftrightarrow \quad 1 + y^2 = e^{2C}(1+x^2) \quad \Leftrightarrow \quad y^2 = e^{2C}(1+x^2) - 1, \end{aligned}$$

där C är en godtycklig konstant. Notera att vi inte får några problem med nolldivisioner. Eftersom $y(0) = -1$ så gäller att

$$(-1)^2 = e^{2C} - 1 \quad \Leftrightarrow \quad e^{2C} = 2.$$

Alltså blir

$$y^2 = 2(1+x^2) - 1 = 1 + 2x^2 \quad \Leftrightarrow \quad y = \pm\sqrt{1+2x^2}.$$

Då $y(0) < 0$ så måste därmed $y = -\sqrt{1+2x^2}$. Det största öppna intervall (som innehåller $x = 0$) där detta uttryck är definierat är hela reella axeln. Vi har inga restriktioner från tidigare, så detta uttryck löser differentialekvationen för alla x.

Svar: $y = -\sqrt{1+2x^2}$, $x \in \mathbf{R}$.

4. (a) Ekvationen är linjär och har det karakteristiska polynomet

$$p(r) = r^3 - r^2 + 4r - 4 = (r-1)(r^2+4) = (r-1)(r-2i)(r+2i).$$

Således ges lösningarna (på reell form) till den homogena ekvationen $p(D)y_h = 0$ av

$$y_h = C_1 e^x + C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x$$

enligt känd sats. Vi söker en partikulärlösning så att

$$p(D)y_p = 24x - 4.$$

Vi ansätter $y_p = Ax + B$. Insatt i ekvationen ger detta

$$p(D)(Ax+B) = 4A - 4(Ax+B) = 24x - 4,$$

så $4A - 4B = -4$ och $-4A = 24$. Vi finner därmed att $A = -6$ och $B = -5$. Vi har därmed funnit den allmänna lösningen

$$y = y_h + y_p = C_1 e^x + C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x - 6x - 5.$$

Villkoren visar att

$$\begin{aligned} &1 = y(0) = C_1 + C_2 - 5 \quad \Leftrightarrow \quad C_1 + C_2 = 6, \\ &0 = y'(0) = C_1 + 2C_3 - 6 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad C_1 + 2C_3 = 6 \text{ och} \\ &0 = y''(0) = C_1 - 4C_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad C_1 = 4C_2. \end{aligned}$$

Om vi löser detta system finner vi att $C_1 = \dfrac{24}{5}$, $C_2 = \dfrac{6}{5}$ och $C_3 = \dfrac{3}{5}$.

(b) Eftersom lösningen är snäll (oändligt deriverbar) ser vi direkt från ekvationen att

$$y'''(0) - y''(0) + 4y'(0) - 4y(0) = 24 \cdot 0 - 4 \quad \Leftrightarrow \quad y'''(0) = 4 - 4 = 0$$

och (efter derivering) att

$$y^{(4)}(0) - y'''(0) + 4y''(0) - 4y'(0) = 24 \quad \Leftrightarrow \quad y^{(4)}(0) = 24.$$

Alltså måste

$$\begin{aligned} y(x) &= y(0) + y'(0)x + \frac{y''(0)}{2}x^2 + \frac{y'''(0)}{6}x^3 + \frac{y^{(4)}(0)}{24}x^4 + O(x^5) \\ &= 1 + x^4 + O(x^5) = 1 + x^4(1 + O(x)) \end{aligned}$$

där $x^4(1 + O(x)) > 0$ för x nära noll (men $x \neq 0$) eftersom $x^4 > 0$ och $1 + O(x) > 0$ då. Lösningen har alltså ett lokalt minimum i $x = 0$.

Svar: (a) $y = \dfrac{1}{5}(24e^x + 6\cos 2x + 3\sin 2x) - 6x - 5$ (b) ett lokalt minimum.

Anmärkning. Det går givetvis även bra att Maclaurinutveckla den explicita lösningen från (a) för att lösa (b).

5. (a) Eftersom

$$\frac{\sin(1/k^2)}{1-\cos(1/k)} = \frac{1/k^2 + O(1/k^6)}{1-(1-1/(2k^2)+O(1/k^4))} = \frac{1+O(1/k^4)}{1/2+O(1/k^2)} \to 2 \neq 0$$

då $k \to \infty$ så är serien divergent enligt divergenstestet (för att kunna ha konvergens är det *nödvändigt* att termerna går mot noll).

(b) Vi använder rottestet och ser att

$$\left|\frac{8^n+1}{n+1}x^{3n}\right|^{1/n} = |x|^3\frac{(8^n+1)^{1/n}}{(n+1)^{1/n}} = 8|x|^3\frac{(1+8^{-n})^{1/n}}{(n+1)^{1/n}} \to 8|x|^3, \text{ då } n \to \infty,$$

så om $8|x|^3 < 1$ är serien absolutkonvergent och om $8|x|^3 > 1$ är serien divergent. Eftersom

$$8|x|^3 < 1 \quad \Leftrightarrow \quad |x| < \frac{1}{2}$$

ser vi att konvergensradien är $1/2$.

För $x = 1/2$ blir serien

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{8^n+1}{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{3n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1+8^{-n}}{n+1} \geq \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1} = \infty$$

då den harmoniska serien är divergent. Den första jämförelsesatsen säger då att även ursprungsserien är divergent (när $x = 1/2$).

För $x = -1/2$ blir serien

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{8^n+1}{n+1}\left(-\frac{1}{2}\right)^{3n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{3n}(1+8^{-n})}{n+1}.$$

Låt $a_n = \dfrac{(-1)^{3n}(1+8^{-n})}{n+1}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ Här ser vi ser att

- termerna a_n alternerar tecken $+ \; - \; + \; - \; + \; - \; \cdots$ för $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$;
- termernas belopp $|a_n| = (1+8^{-n})/(n+1)$ är monotont avtagande då $n \to \infty$ (eftersom nämnaren är växande och täljaren är avtagande);
- termerna går mot noll, dvs $a_n \to 0$ då $n \to \infty$ då täljaren är begränsad och nämnaren går mot oändligheten.

Eftersom termernas belopp i denna alternerande serie avtar mot noll följer det att serien är konvergent enligt Leibniz kriterium.

Svar: (a) Divergent (b) serien är konvergent för $-1/2 \leq x < 1/2$ (och annars divergent).

6. Integralen är generaliserad i 0 och har eventuellt problem även i 1 (men det kommer visa sig att integralen faktiskt inte är generaliserad i 1). Dessutom växlar integranden tecken när $x = 1/2$, så låt oss dela upp integralen i två delar:

$$\int_0^{1/2}\sqrt{\frac{1}{x}-1}\,\ln\left(\frac{1}{x}-1\right)dx + \int_{1/2}^{1}\sqrt{\frac{1}{x}-1}\,\ln\left(\frac{1}{x}-1\right)dx. \tag{1}$$

Notera att med $t = 1/x - 1$ så gäller att $x \to 1^- \;\Leftrightarrow\; t \to 0^+$ och

$$\sqrt{\frac{1}{x}-1}\,\ln\left(\frac{1}{x}-1\right) = \sqrt{t}\ln t \to 0 \text{ då } t \to 0^+$$

enligt standardgränsvärde. Detta innebär att integranden i den andra integralen i (1) kan utvidgas kontinuerligt till $[1/2, 1]$ och integralen är därmed konvergent (ej generaliserad). Vidare gäller, för $0 < x < 1/2$, att

$$0 \leq \sqrt{\frac{1}{x} - 1} \ln\left(\frac{1}{x} - 1\right) = \sqrt{\frac{1-x}{x}} \ln\left(\frac{1-x}{x}\right) \leq \frac{1}{\sqrt{x}} \ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$$

eftersom $\sqrt{1-x} \leq 1$ och $\ln\left(\frac{1-x}{x}\right) \leq \ln\left(\frac{1}{x}\right)$ för $0 < x < 1/2$. Vi kan nu med hjälp av partialintegration visa att

$$\int_\delta^{1/2} x^{-1/2} \ln x \, dx = \left[2x^{1/2} \ln x\right]_\delta^{1/2} - \int_\delta^{1/2} \frac{2}{x^{1/2}} \, dx = -\frac{2\ln 2}{\sqrt{2}} - 2\delta^{1/2} \ln \delta - \frac{4}{\sqrt{2}} + 4\sqrt{\delta},$$

där vi ser att högerledet har ett gränsvärde då $\delta \to 0^+$ enligt standardgränsvärde. Således är den första integralen i (1) absolutkonvergent och därmed konvergent. Eftersom båda integralerna i (1) är konvergenta är även integralen given i uppgiften konvergent.

Svar: Konvergent.

7. Vi skriver om termerna i serien och använder standardutvecklingar för att visa att

$$\begin{aligned}
\left(\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)^{n^\alpha} &= \exp\left(n^\alpha \ln\left(\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)\right) \\
&= \exp\left(n^\alpha \ln\left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2 + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right) \\
&= \exp\left(n^\alpha \left(-\frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right) = \exp\left(-\frac{1}{2}n^{\alpha-1}\left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)
\end{aligned}$$

För att serien ska kunna vara konvergent så måste termerna gå mot noll (divergenstestet), så vi ser att $\alpha > 1$ är nödvändigt (vi måste få $n^{\alpha-1} \to \infty$). Är $\alpha > 1$ även tillräckligt? Termerna i serien är positiva och eftersom $1/n \to 0$ så finns det ett tal N_1 så att

$$n \geq N_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} < 1 + O\left(\frac{1}{n}\right) < \frac{3}{2},$$

vilket medför att

$$n \geq N_1 \quad \Rightarrow \quad \exp\left(-\frac{1}{2}n^{\alpha-1}\left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) \leq \exp\left(-\frac{1}{4}n^{\alpha-1}\right).$$

Enligt första jämförelsesatsen gäller då att

$$\sum_{n=N_1}^{\infty} e^{-n^{\alpha-1}/4} \text{ konvergent} \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)^{n^\alpha} \text{ konvergent}$$

eftersom $\displaystyle\sum_{n=1}^{N_1-1} \left(\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)^{n^\alpha}$ är en ändlig summa. Låt oss betrakta serien $\displaystyle\sum_{n=N_1}^{\infty} e^{-n^{\alpha-1}/4}$. Vi försöker överskatta termerna i denna serie med någonting vi vet ger en konvergent serie. Vi ser (till exempel) att

$$e^{-n^{\alpha-1}/4} \leq \frac{1}{n^2} \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{n^{\alpha-1}}{4} \leq \ln\left(\frac{1}{n^2}\right) = -2\ln n \quad \Leftrightarrow \quad \ln n \leq \frac{n^{\alpha-1}}{8}$$

och då
$$\frac{\ln n}{n^{\alpha-1}} \to 0, \text{ då } n \to \infty \text{ för varje } \alpha > 1,$$
så finns det ett heltal $N \geq N_1$ så att
$$n \geq N \quad \Rightarrow \quad e^{-n^{\alpha-1}/2} \leq \frac{1}{n^2}.$$
Alltså måste
$$\sum_{n=N_1}^{\infty} e^{-n^{\alpha-1}/4} \leq \sum_{n=N_1}^{N-1} e^{-n^{\alpha-1}/2} + \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$
vara konvergent om $\alpha > 1$. Alltså är även den ursprungliga serien konvergent precis då $\alpha > 1$.

Svar: Konvergent precis då $\alpha > 1$.