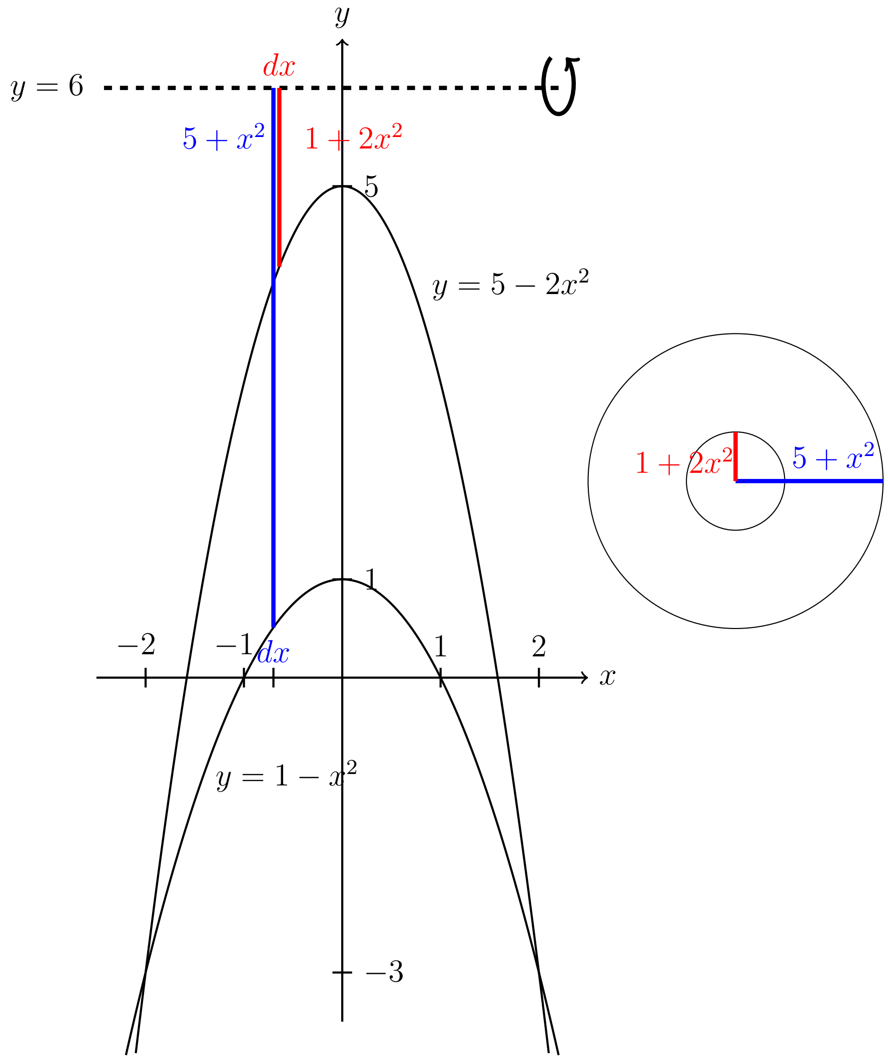
Lösningsförslag envariabelanalys 2 2021-06-??

1. Vi börjar med en tydlig figur.



Skärningspunkterna mellan kurvorna fås ur

$$5 - 2x^2 = 1 - x^2 \iff x^2 = 4 \iff x = \pm 2 \Longrightarrow y = 1 - (\pm 2)^2 = -3$$

så kurvorna skär varann i punkterna $(\pm 2, -3)$. Vid rotation av de båda remsorna uppstår två tunna skivor och det sökta volymselementet är differensen mellan dessa. Vi får

$$\begin{aligned}
dV_1 &= \pi(6-(1-x^2))^2dx = \pi(5+x^2)^2dx,\\
dV_2 &= \pi(6-(5-2x^2))^2dx = \pi(1+2x^2)^2dx,\\
dV &= dV_1 - dV_2 = \pi(25+10x^2+x^4-(1+4x^2+4x^4))dx = \pi(24+6x^2-3x^4)dx,\\
V &= \int dV = \pi\int_{-2}^{2}(24+6x^2-3x^4)dx = \begin{bmatrix}\text{jämn}\\ \text{integrand}\end{bmatrix} = 2\pi\int_0^2(24+6x^2-3x^4)dx =\\
&= 2\pi\left[24x+2x^3-\frac{3}{5}x^5\right]_0^2 = 2\pi\left(48+16-\frac{96}{5}\right) = 2\pi\frac{240+80-96}{5} = \frac{448\pi}{5}
\end{aligned}$$

2. Ekvationen $y^{(4)} - 2y''' + 2y'' - 2y' + y = 2x + \mathrm{e}^{2x}$ har den karakteristiska ekvationen

$$\begin{aligned}
P(r) &= r^4 - 2r^3 + 2r^2 - 2r + 1 = r^4 - 2r^3 + r^2 + r^2 - 2r + 1 = \\
&= r^2(r^2 - 2r + 1) + r^2 - 2r + 1 = (r^2 + 1)(r^2 - 2r + 1) = \\
&= (r^2 + 1)(r - 1)^2 = 0 \iff r = 1 \text{ (dubbelrot)}, \pm i \iff \\
\iff y_h &= (C_0 + C_1 x)\mathrm{e}^x + C_2 \sin x + C_3 \cos x.
\end{aligned}$$

Linjäriteten gör att vi kan dela upp $y_p = y_{p_1} + y_{p_2}$ där $P(D)y_{p_1} = 2x$ och $P(D)y_{p_2} = \mathrm{e}^{2x}$. Ansätt

$$\begin{aligned}
y_{p_1} &= A + Bx \Longrightarrow y'_{p_1} = B \Longrightarrow y''_{p_1} = y'''_{p_1} = 0 \Longrightarrow \\
\Longrightarrow P(D)y_{p_1} &= -2B + A + Bx = 2x \iff B = 2,\ A = 2B = 4 \Longrightarrow y_{p_1} = 4 + 2x \\
y_{p_2} &= C\mathrm{e}^{2x} \Longrightarrow y'_{p_2} = 2C\mathrm{e}^{2x} \Longrightarrow y''_{p_2} = 4C\mathrm{e}^{2x} \Longrightarrow y'''_{p_2} = 8C\mathrm{e}^{2x} \Longrightarrow \\
\Longrightarrow y^{(4)}_{p_2} &= 16C\mathrm{e}^{2x} \Longrightarrow \\
\Longrightarrow P(D)y_{p_2} &= C\mathrm{e}^{2x}(16 - 16 + 8 - 4 + 1) = 5C\mathrm{e}^{2x} = \mathrm{e}^{2x} \iff C = \frac{1}{5} \Longrightarrow y_{p_2} = \frac{1}{5}\mathrm{e}^{2x}, \\
y = y_h + y_{p_1} + y_{p_2} &= (C_0 + C_1 x)\mathrm{e}^x + C_2 \sin x + C_3 \cos x + 4 + 2x + \frac{1}{5}\mathrm{e}^{2x}
\end{aligned}$$

3. (a) Maclaurinutveckling med hjälp av standardutvecklingarna ger

$$\begin{aligned}
\ln(1 + 3x) &= 3x - \frac{1}{2}(3x)^2 + \mathcal{O}(x^3) = 3x - \frac{9}{2}x^2 + \mathcal{O}(x^3), \\
\sqrt{1 - 6x} &= (1 - 6x)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}(-6x) + \binom{1/2}{2}(-6x)^2 + \mathcal{O}(x^3) = \\
&= 1 - 3x - \frac{36}{8}x^2 + \mathcal{O}(x^3) = 1 - 3x - \frac{9}{2}x^2 + \mathcal{O}(x^3), \\
\cos 2x &= 1 - \frac{1}{2}(2x)^2 + \mathcal{O}(x^4) = 1 - 2x^2 + \mathcal{O}(x^4)
\end{aligned}$$

så att

$$\begin{aligned}
\ln(1 + 3x) + \sqrt{1 - 6x} - \cos 2x &= \left(3x - \frac{9}{2}x^2 + \mathcal{O}(x^3)\right) + \\
&+ \left(1 - 3x - \frac{9}{2}x^2 + \mathcal{O}(x^3)\right) - \\
&- \left(1 - 2x^2 + \mathcal{O}(x^4)\right) = -7x^2 + \mathcal{O}(x^3)
\end{aligned}$$

vilket ger

$$\frac{\ln(1 + 3x) + \sqrt{1 - 6x} - \cos 2x}{x^2} = \frac{-7x^2 + \mathcal{O}(x^3)}{x^2} = -7 + \mathcal{O}(x) \to -7$$

då $x \to 0$.

(b) Sätt $t = \frac{1}{x}$. Då gäller $x \to \infty \iff t \to 0^+$. Därmed kan vi utnyttja standardutvecklingarna. Vi får

$$\arctan\frac{1}{x}-\sin\frac{1}{x}=\arctan t-\sin t=t-\frac{1}{3}t^3-t+\frac{1}{6}t^3+\mathcal{O}\big(t^5\big)=-\frac{1}{6}t^3+\mathcal{O}\big(t^5\big)\,,$$

$$\mathrm{e}^{1/x^2}-\cos\frac{2}{x}=\mathrm{e}^{t^2}-\cos 2t=1+t^2-1+\frac{1}{2}(2t)^2+\mathcal{O}\big(t^4\big)=3t^2+\mathcal{O}\big(t^4\big)\,,$$

$$\frac{x(\arctan\frac{1}{x}-\sin\frac{1}{x})}{\mathrm{e}^{1/x^2}-\cos\frac{2}{x}}=\left[t=\frac{1}{x}\right]=\frac{\arctan t-\sin t}{t(\mathrm{e}^{t^2}-\cos 2t)}=\frac{-\frac{1}{6}t^3+\mathcal{O}(t^5)}{t(3t^2+\mathcal{O}(t^4))}=$$

$$=\frac{-\frac{1}{6}+\mathcal{O}(t^2)}{3+\mathcal{O}(t^2)}\to-\frac{1}{18}$$

då $t\to 0^+$

(c) Börja utveckla inifrån. Vi får

$$\begin{aligned}\cos\left(\mathrm{e}^x-1\right)&=\cos\left(1+x+\frac{1}{2}x^2+\mathcal{O}\big(x^3\big)-1\right)=\\&=\cos\left(x+\frac{1}{2}x^2+\mathcal{O}\big(x^3\big)\right)=\\&=1-\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}x^2+\mathcal{O}\big(x^3\big)\right)^2+\mathcal{O}\left(\left(x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\mathcal{O}\big(x^4\big)\right)^4\right)=\\&=1-\frac{1}{2}\left(x^2+x^3\right)+\mathcal{O}\big(x^4\big)=1-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x^3+\mathcal{O}\big(x^4\big)\,.\end{aligned}$$

4. (a) Då koefficienterna innehåller fakultet använder vi kvotkriteriet. Vi får

$$\begin{aligned}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|&=\left|\frac{(2(n+1))!}{((n+1)!)^2}x^{n+1}\Big/\frac{(2n)!}{(n!)^2}x^n\right|=\frac{(2n+2)!}{(2n)!}\cdot\frac{(n!)^2}{((n+1)!)^2}\,|x|=\\&=\frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2}\,|x|=2\frac{2n+1}{n+1}\,|x|\to 4\,|x|=Q\end{aligned}$$

då $n\to\infty$. Kvotkriteriet ger att serien är absolutkonvergent då $Q=4\,|x|<1\iff |x|<1/4$ och divergent då $|x|>1/4$, d.v.s. konvergensradien är $1/4$.

(b) Integralen är generaliserad i både 0 och ∞ och måste därför delas upp,

$$\int_0^\infty\frac{\sqrt{\arctan x}}{x+x^2}\,dx=\int_0^1\frac{\sqrt{\arctan x}}{x+x^2}\,dx+\int_1^\infty\frac{\sqrt{\arctan x}}{x+x^2}\,dx.$$

För $0<x\le 1$ gäller

$$f(x)=\frac{\sqrt{\arctan x}}{x+x^2}=\underbrace{\frac{1}{\sqrt{x}}}_{g_0(x)}\cdot\underbrace{\sqrt{\frac{\arctan x}{x}\cdot\frac{1}{1+x}}}_{h_0(x)}$$

där $h_0(x)\to 1$ då $x\to 0^+$. Då $\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ är konvergent enligt Sats 10.12, sid 456 ($\alpha=\frac{1}{2}<1$) ger Jämförelsesats II (Sats 10.13, sid 458) att $\int_0^1 f(x)\,dx$ också är konvergent.

För $x\ge 1$ gäller

$$f(x)=\frac{\sqrt{\arctan x}}{x+x^2}=\frac{1}{x^2}\frac{\sqrt{\arctan x}}{1+\frac{1}{x}}\le\frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Då $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$ är konvergent enligt Sats 10.12, sid 456 ($\alpha = 2 > 1$) ger Jämförelsesats I (Sats 10.11, sid 456) att $\int_1^\infty f(x)\,dx$ också är konvergent. Då båda delintegralerna är konvergenta är även $\int_0^\infty f(x)\,dx$ konvergent.

5. Vi börjar med att notera att både e^y och $(1+x^2)^2$ är positiva. Därmed kan vi, vid behov och utan inskränkningar, dividera med båda. Efter omskrivning ser vi att ekvationen är separabel ty

$$(1+x^2)^2y' - 2x\,\mathrm{e}^y = 0 \iff (1+x^2)^2y' = 2x\,\mathrm{e}^y \iff \frac{y'}{\mathrm{e}^y} = \mathrm{e}^{-y}y' = \frac{2x}{(1+x^2)^2} \iff$$
$$\iff \int \mathrm{e}^{-y}\,dy = -\mathrm{e}^{-y} = \int \frac{2x\,dx}{(1+x^2)^2} = -\frac{1}{1+x^2} + C \iff \mathrm{e}^{-y} = \frac{1}{1+x^2} - C.$$

Insättning av begynnelsevillkoret, $y(0) = \ln 2$, ger

$$\mathrm{e}^{-y(0)} = \mathrm{e}^{-\ln 2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+0^2} - C = 1 - C \iff C = \frac{1}{2}$$

så att

$$\mathrm{e}^{-y} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{2} = \frac{2-(1+x^2)}{2(1+x^2)} = \frac{1-x^2}{2(1+x^2)} > 0$$

eftersom $\mathrm{e}^{-y} > 0$ för alla $y \in \mathbb{R}$. Därmed måste $|x| < 1$ för att lösningen skall vara definierad. Följaktligen, för $|x| < 1$ gäller

$$\mathrm{e}^{-y} = \frac{1-x^2}{2(1+x^2)} \iff -y = \ln\frac{1-x^2}{2(1+x^2)} \iff$$
$$\iff y = -\ln\frac{1-x^2}{2(1+x^2)} = \ln\frac{2(1+x^2)}{1-x^2} = \ln 2 + \ln\frac{1+x^2}{1-x^2}. \tag{1}$$

Förutom villkoret $|x| < 1$, har vi inga restriktioner eller villkor som påverkar lösningens definitionsmängd. Följaktligen ges lösningen av (1) ovan och dess definitionsmängd är intervallet $]-1, 1[$.

6. Vi skall utnyttja Maclaurinutveckling med restterm på Lagranges form, fast inte av $\arcsin x$. Då $\arcsin x$ blir jobbig att derivera använder vi dess derivata och utnyttjar

$$\int_0^{\frac{1}{10}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \Big[\arcsin x\Big]_0^{\frac{1}{10}} = \arcsin\frac{1}{10}$$

för att sedan Maclaurinutveckla $1/\sqrt{1+t}$ med restterm på Lagranges form och sedan sätta $t = -x^2$.

Vi får

$$D(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \Big[-x^2 = t\Big] = \frac{1}{\sqrt{1+t}} = (1+t)^{-1/2} = f(t)$$

$$\begin{aligned}
f(t) &= (1+t)^{-1/2} & f(0) &= 1,\\
f'(t) &= -\frac{1}{2}(1+t)^{-3/2}, & f'(0) &= -\frac{1}{2},\\
f''(t) &= \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}(1+t)^{-5/2}, & f''(\xi) &= \frac{3}{4}\frac{1}{(1+\xi)^{5/2}}
\end{aligned}$$

så att

$$f(t)=1-\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4(1+\xi)^{5/2}}t^2=\Big[t=-x^2\Big]=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{8(1+\xi)^{5/2}}x^4=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

för något ξ mellan 0 och $t=-x^2$.
Detta ger

$$\arcsin\frac{1}{10}=\int_0^{\frac{1}{10}}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\underbrace{\int_0^{\frac{1}{10}}\left(1+\frac{1}{2}x^2\right)dx}_{\text{approximationen}}+\underbrace{\frac{3}{8}\int_0^{\frac{1}{10}}\frac{x^4\,dx}{(1+\xi)^{5/2}}}_{\text{felet}}.$$

På hela integrationsintervallet $0\le x\le 1/10$ gäller

$$-\frac{1}{10^2}=-\frac{1}{100}\le -x^2\le\xi\le 0$$

vilket ger

$$|\text{felet}|=\frac{3}{8}\int_0^{\frac{1}{10}}\frac{x^4\,dx}{(1+\xi)^{5/2}}\le\frac{3}{8}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{100}\right)^{5/2}}\int_0^{\frac{1}{10}}x^4\,dx=\frac{3}{8}\left(\frac{100}{99}\right)^{5/2}\left[\frac{1}{5}x^5\right]_0^{\frac{1}{10}}\le$$
$$\le\frac{3}{40}\cdot\frac{21}{20}\cdot\frac{1}{10^5}=\frac{63}{800}\cdot\frac{1}{10^5}<\frac{80}{800}\cdot\frac{1}{10^5}=10^{-6}.$$

Därmed har vi visat att vi uppnår den efterfrågade noggrannheten och det återstår endast att beräkna den rationella approximationen,

$$r=\int_0^{\frac{1}{10}}\left(1+\frac{1}{2}x^2\right)dx=\left[x+\frac{1}{6}x^3\right]_0^{\frac{1}{10}}=\frac{1}{10}+\frac{1}{6000}=\frac{601}{6000}.$$

7. Då f är positiv, kontinuerlig och avtagande gäller att $f(x)$ har gränsvärde då $x\to\infty$ och då $\int_2^\infty f(x)\,dx$ existerar är gränsvärdet 0. Ty, om inte skulle f ha en *positiv* undre begränsning och då skulle inte integralen var konvergent. Vidare, definitionen av konvergens för en generaliserad integral säger

$$\int_a^\infty f(x)\,dx=\lim_{R\to\infty}\int_a^R f(x)\,dx$$

om gränsvärdet existerar. Ur detta följer att om $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$ är konvergent så gäller

$$\lim_{R\to\infty}\int_R^\infty f(x)\,dx=0. \tag{2}$$

Detta är precis det som behövs för att erhålla det efterfrågade resultatet. Då f är avtagande och positiv gäller

$$\int_{x/2}^x f(t)\,dt\ge f(x)\int_{x/2}^x dt=f(x)\left(x-\frac{x}{2}\right)=\frac{x}{2}f(x)\ge 0\iff$$
$$\iff 0\le xf(x)\le 2\int_{x/2}^x f(t)\,dt\le 2\int_{x/2}^\infty f(t)\,dt\to 0$$

då $x \to \infty$ enligt (2) ovan, d.v.s.

$$\lim_{x\to\infty} xf(x) = 0$$

enligt instängningsregeln (Sats 3.3, sid 129). VSB.

Som motexempel väljer vi $f(x) = \dfrac{1}{x\ln x}$ som för $x \geq 2$ är positiv, kontinuerlig och avtagande. Vidare,

$$xf(x) = \frac{1}{\ln x} \searrow 0 \quad \text{då } x \to \infty \quad \text{och} \int_2^R f(x)\,dx = \int_2^R \frac{dx}{x\ln x} = \Big[\ln(\ln x)\Big]_2^R \to \infty$$

då $R \to \infty$, d.v.s. $\displaystyle\int_2^\infty f(x)\,dx$ är divergent trots att $f(x) \searrow 0$ snabbare än $\dfrac{1}{x}$ då $x \to \infty$.