TATA42 Envariabelanalys 2 2021-06-04 fm, lösningsförslag

1. Eftersom $x > 0$ får vi, med integrerande faktor $e^{-3\ln x} = 1/x^3$ i steg $*$ nedan och partialintegration i slutet,

$$xy' - 3y = x^5 e^x \quad \Leftrightarrow \quad y' - \frac{3}{x}\,y = x^4 e^x \quad \overset{*}{\Leftrightarrow} \quad \frac{1}{x^3}\,y' - \frac{3}{x^4}\,y = xe^x \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{y}{x^3}\right)' = xe^x$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{y}{x^3} = \int xe^x\,dx = xe^x - \int 1\cdot e^x\,dx = (x-1)e^x + C.$$

Bivillkoret ger nu $2 = y(1) = C$, så $y/x^3 = (x-1)e^x + 2$, d.v.s. $y = (x^4 - x^3)e^x + 2x^3$.

<u>Svar</u>: $y = (x^4 - x^3)e^x + 2x^3$.

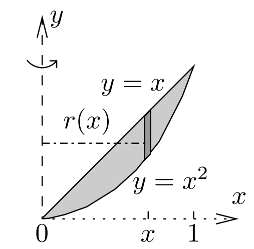
2. (a) Bågelementet $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + (dy/dx)^2}\,dx = \sqrt{1 + (3x^2)^2}\,dx = ds(x)$ med en växande parameter x, så kurvans längd

$$L = \int_0^1 ds(x) = \int_0^1 \sqrt{1 + 9x^4}\,dx.$$

(b) Området byggs upp av tunna cirkelsektorer med radie $R(\varphi) = e^\varphi$ och öppningsvinkel $d\varphi$. En sådan sektor har area $dA = \pi R^2 \cdot d\varphi/2\pi = (1/2)R^2\,d\varphi = (1/2)(e^\varphi)^2\,d\varphi = dA(\varphi)$, så områdets area

$$A = \int_0^\pi dA(\varphi) = \int_0^\pi \frac{e^{2\varphi}}{2}\,d\varphi.$$

(c) Notera först att $x^2 \le x$ precis då $x(x-1) \le 0$, d.v.s. precis då $0 \le x \le 1$. Den mörkare tunna stapeln vid x har höjd = övre y-värdet − undre y-värdet $= x - x^2$ och bredd dx, och när den roterar ett varv kring y-axeln, alltså linjen $x = 0$, genererar den ett tunt rör med radie $r(x) = x - 0$ och volym $dV(x) =$ omkrets·höjd·bredd $= 2\pi(x-0)(x-x^2)\,dx$. Kroppens volym blir därför



$$V = \int_0^1 dV(x) = \int_0^1 2\pi(x^2 - x^3)\,dx.$$

3. Vi får successivt

$$f(x) = \sin x,\ f'(x) = \cos x,\ f''(x) = -\sin x,\ f'''(x) = -\cos x,\ f^{(4)}(x) = \sin x,\ f^{(5)}(x) = \cos x,$$

så

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 1, \quad f''(0) = 0, \quad f'''(0) = -1, \quad f^{(4)}(0) = 0, \quad f^{(5)}(\xi) = \cos\xi,$$

varför

$$\sin x = f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}x^5$$
$$= x - \frac{x^3}{6} + \frac{\cos\xi}{120}x^5$$

för något $\xi = \xi(x)$ mellan 0 och x. Med $x = 1/10$ får vi sedan

$$\sin\Big(\frac{1}{10}\Big) = \frac{1}{10} - \frac{(1/10)^3}{6} + \frac{\cos\xi}{120}\Big(\frac{1}{10}\Big)^5 = \frac{599}{6000} + \frac{\cos\xi}{120\cdot 10^5}$$

för något ξ mellan 0 och 1/10. Eftersom $|\cos\xi| \le 1$, oavsett var ξ finns, får vi slutligen

$$\left|\sin\Big(\frac{1}{10}\Big) - \frac{599}{6000}\right| = \left|\frac{\cos\xi}{120\cdot 10^5}\right| = \frac{|\cos\xi|}{120\cdot 10^5} \le \frac{1}{120\cdot 10^5} \le 10^{-7}.$$

<u>Svar</u>: $\dfrac{p}{q} = \dfrac{599}{6000}$ duger.

4. (a) Sätt

$$a_k = \frac{x^k}{2^k(k^2+1)}$$

för fixt $x \neq 0$. Vi får

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \left|\frac{x^{k+1}}{2^{k+1}\big((k+1)^2+1\big)}\Big/\frac{x^k}{2^k(k^2+1)}\right| = \frac{|x|}{2}\cdot\frac{1+1/k^2}{(1+1/k)^2+1/k^2} \to \frac{|x|}{2} = Q$$

då $k \to \infty$. Enligt kvotkriteriet är potensserien absolutkonvergent då $Q < 1$, d.v.s. då $|x| < 2$, och divergent då $Q > 1$, d.v.s. då $|x| > 2$; således är konvergensradien $R = 2$.
Det återstår att undersöka ändpunkterna $x = \pm 2$. Då $x = 2$ blir $a_k = 1/(k^2+1)$ och då $x = -2$ blir $a_k = (-1)^k/(k^2+1)$. I båda fallen får vi $|a_k| = 1/(k^2+1)$, och eftersom

$$\sum_{k=1}^{\infty}|a_k| = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2+1} \leq \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$$

och $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2$ är konvergent (standardserie), följer det att den positiva serien $\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|$ också är konvergent enligt jämförelsekriteriet. Således är $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolutkonvergent och därmed konvergent, och detta gäller alltså i båda ändpunkterna.

Svar: $-2 \leq x \leq 2$.

(b) Vi ser omedelbart att

$$0 \leq \frac{1}{x^2+e^x} \leq \frac{1}{0+e^x} = e^{-x}, \qquad x > 0,$$

så

$$0 \leq \int_0^{\infty}\frac{dx}{x^2+e^x} \leq \int_0^{\infty} e^{-x}dx = \big[-e^{-x}\big]_0^{\infty} = 1 \leq 2,$$

vilket skulle bevisas.

5. Omstuvning av termerna ger $(1-x^2)y' = y^2-1$. Eftersom vi söker en lösning vars graf ska gå genom $(x,y) = (2,3)$, och $1-x^2 = 0$ då $x = \pm 1$ och $y^2 - 1 = 0$ då $y = \pm 1$, kan vi i fortsättningen anta att $x > 1$ och $y > 1$. Där kan vi dividera, och vi får

$$\begin{aligned}(1-x^2)y' = y^2-1 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{y'}{(y+1)(y-1)} = -\frac{1}{(x+1)(x-1)}\\ &\Leftrightarrow \quad \int\frac{dy}{(y+1)(y-1)} = -\int\frac{dx}{(x+1)(x-1)} + C,\end{aligned}$$

om vi här låter $\int$ stå för *en* primitiv. Eftersom, med partialbråksuppdelning,

$$\int\frac{dt}{(t+1)(t-1)} = \int\left(\frac{-1/2}{t+1}+\frac{1/2}{t-1}\right)dt = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|$$

är *en* primitiv får vi alltså

$$\ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right| = -\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + 2C.$$

Bivillkoret $y(2) = 3$ ger nu $\ln(2/4) = -\ln(1/3) + 2C$, så $2C = \ln(1/6)$. Att ln är injektiv ger nu

$$\ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right| = -\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + \ln\frac{1}{6} = \ln\left|\frac{x+1}{6(x-1)}\right| \;\Leftrightarrow\; \left|\frac{y-1}{y+1}\right| = \left|\frac{x+1}{6(x-1)}\right| \;\Leftrightarrow\; \frac{y-1}{y+1} = \pm\frac{x+1}{6(x-1)},$$

där $+$ gäller i sista steget eftersom $x > 1$ och $y > 1$ (alternativt använder vi $y(2) = 3$ igen). Alltså,

$$\frac{y-1}{y+1} = \frac{x+1}{6(x-1)} \quad\Leftrightarrow\quad 6(x-1)(y-1) = (x+1)(y+1) \quad\Leftrightarrow\quad y = \frac{7x-5}{5x-7},$$

och det största öppna delintervall av $x > 1$ som innehåller punkten $x = 2$ och där $5x - 7 \neq 0$ är $x > 7/5$.

Svar: $y = \dfrac{7x-5}{5x-7}$, $x > \dfrac{7}{5}$.

6. Vi utvecklar alla funktioner t.o.m. grad 4; om det räcker upptäcker vi lite senare, och i annat fall får vi gå tillbaka och utveckla lite längre.

   Vi utvecklar först ln-termen. Standardutvecklingen $\ln(1+t) = t - t^2/2 + t^3/3 - t^4/4 + \mathcal{O}(t^5)$ använd med $t = \sin x = x - x^3/6 + \mathcal{O}(x^5)$ (observera att $x \to 0 \Rightarrow t \to 0$) ger

   $$t^2 = t \cdot t = x^2 - x^4/3 + \mathcal{O}(x^6);\ t^3 = t^2 \cdot t = x^3 + \mathcal{O}(x^5);\ t^4 = t^3 \cdot t = x^4 + \mathcal{O}(x^6);\ \mathcal{O}(t^5) = \mathcal{O}(x^5),$$

   så

   $$\begin{aligned}\ln(1+\sin x) &= \big(x - \frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^5)\big) - \frac{1}{2}\big(x^2 - \frac{x^4}{3} + \mathcal{O}(x^6)\big) + \frac{1}{3}\big(x^3 + \mathcal{O}(x^5)\big) - \frac{1}{4}\big(x^4 + \mathcal{O}(x^6)\big) + \mathcal{O}(x^5)\\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{12} + \mathcal{O}(x^5).\end{aligned}$$

   Vi får därför, med fler standardutvecklingar,

   $$\begin{aligned}f(x) &= \ln(1+\sin x) + A\cos x + B\arctan x + Cx^3\\ &= \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{12} + \mathcal{O}(x^5)\right) + A\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \mathcal{O}(x^6)\right) + B\left(x - \frac{x^3}{3} + \mathcal{O}(x^5)\right) + Cx^3\\ &= A + (1+B)x + \left(-\frac{1}{2} - \frac{A}{2}\right)x^2 + \left(\frac{1}{6} - \frac{B}{3} + C\right)x^3 + \left(-\frac{1}{12} + \frac{A}{24}\right)x^4 + \mathcal{O}(x^5).\end{aligned}$$

   Beroende på vilken överlevande x^k-term, $k \geq 1$, som har lägst gradtal får vi därför följande fall vad gäller lokalt maximum för $f(x)$ då $x = 0$:

   - Om $1 + B \neq 0$, d.v.s. om $B \neq -1$, har vi *ej* lokalt maximum.
   - Om $B = -1$ blir $f(x) = A + (-1/2 - A/2)x^2 + (1/2 + C)x^3 + (-1/12 + A/24)x^4 + \mathcal{O}(x^5)$, så vi har
     - *ej* lokalt maximum om $-1/2 - A/2 > 0$, d.v.s. om $A < -1$.
     - lokalt maximum om $-1/2 - A/2 < 0$, d.v.s. om $A > -1$.
   - Om $B = -1$ och $A = -1$ blir $f(x) = -1 + (1/2 + C)x^3 - x^4/8 + \mathcal{O}(x^5)$, så vi har
     - *ej* lokalt maximum om $1/2 + C \neq 0$, d.v.s. om $C \neq -1/2$,
     - lokalt maximum om $C = -1/2$, ty då är $f(x) = -1 - x^4/8 + \mathcal{O}(x^5)$.

   Svar: Precis då ($A > -1$ och $B = -1$) eller $(A, B, C) = (-1, -1, -1/2)$.

7. (a) Om $s \in \mathbb{R}$, N är ett positivt heltal och $n > N$ får vi

   $$\begin{aligned}|\sigma_n - s| &= \left|\frac{s_1 + \ldots + s_n}{n} - s\right| = \frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{n}(s_k - s)\right| \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|s_k - s|\\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N}|s_k - s| + \frac{1}{n}\sum_{k=N+1}^{n}|s_k - s|.\end{aligned}$$

   Enligt antagandet är $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = s$, d.v.s. att delsummorna $s_k \to s$ då $k \to \infty$. Låt $\epsilon > 0$ vara godtyckligt. Då finns ett heltal $N = N(\epsilon)$ sådant att $|s_k - s| < \epsilon$ för alla $k > N$. För detta N och alla $n > N$ gäller således

   $$|\sigma_n - s| \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N}|s_k - s| + \frac{n-N}{n}\epsilon < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon$$

   om bara $n > N_1$, där $N_1 = N_1(\epsilon)$ är så stort att $N_1 > N$ och $N_1 > \big(\sum_{k=1}^{N}|s_k - s|\big)/\epsilon$ samtidigt. Slutsatsen är att $\sigma_n \to s$ då $n \to \infty$, vilket skulle bevisas.

   (b) Nej, det är inte nödvändigt. Ett motexempel är serien

   $$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1} = 1 + (-1) + 1 + (-1) + \ldots,$$

   som är divergent enligt divergenstestet. Delsummorna $s_1, s_2, s_3, s_4, \ldots$ blir här $1, 0, 1, 0, \ldots$, så $\sigma_{2m} = m/(2m) = 1/2$ och $\sigma_{2m+1} = (m+1)/(2m+1) = (1 + 1/m)/(2 + 1/m)$, som båda har gränsvärdet $1/2$ då $m \to \infty$, så $\sigma_n \to 1/2$ då $n \to \infty$.