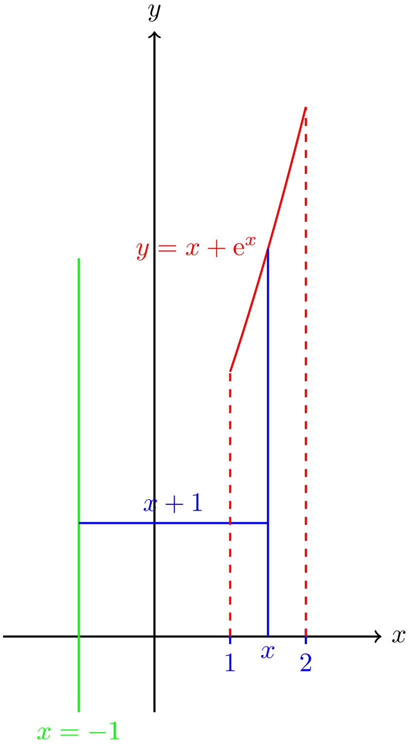
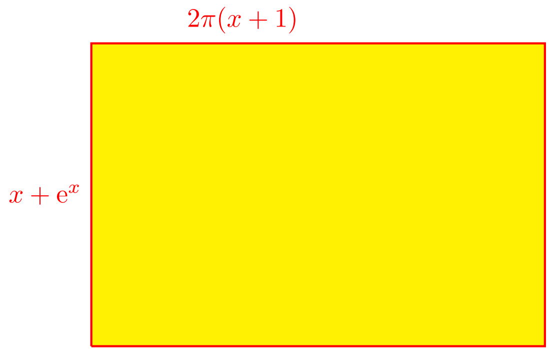
SVAR M.M., ENVARIABELANALYS 2, TATA42, 2021-06-05 KL. 14–19

1 (a). Eftersom $y' = 2x + 3e^{3x}$ ges kurvlängden av

$$\int_2^4 \sqrt{1 + (y'(x))^2}\, dx = \int_2^4 \sqrt{1 + (2x + 3e^{3x})^2}\, dx = \int_2^4 \sqrt{1 + 4x^2 + 12xe^{3x} + 9e^{6x}}\, dx.$$

Svar: $\int_2^4 \sqrt{1 + 4x^2 + 12xe^{3x} + 9e^{6x}}\, dx$.





När den blå stolpen vid x roteras kring $x = -1$ uppstår en cylinder med omkrets $2\pi(x + 1)$ (avståndet mellan x och linjen är $x + 1$) och höjd $x + e^x$, som har area $2\pi \cdot (x + 1) \cdot (x + e^x) = 2\pi(x^2 + x + xe^x + e^x)$. Volymen av rotationskroppen ges av att integrera denna tvärsnittsarea från 1 till 2:

$$\int_1^2 2\pi(x^2 + x + xe^x + e^x)\, dx = 2\pi \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + xe^x \right]_1^2 = \ldots = \pi \left(\frac{23}{3} + 4e^2 - 2e \right).$$

Svar: $\pi \left(\frac{23}{3} + 4e^2 - 2e\right)$.

2 (a). Eftersom $r^4 + r^2 = r^2(r^2 + 1) = r^2(r + i)(r - i)$ är den allmänna homogenlösningen

$$y_h = Ax + B + C \cos x + D \sin x.$$

Vi ansätter nu $y_p = ax^4 + bx^2$, vilket ger $y_p' = 4ax^3 + 2bx$, $y_p'' = 12ax^2 + 2b$, $y_p''' = 24ax$, $y_p^{(4)} = 24a$, vilket leder till ekvationen

$$y_p^{(4)} + y_p'' = 24a + 12ax^2 + 2b = x^2.$$

Detta ger $a = 1/12$ och $b = -1$, så

$$y = y_h + y_p = Ax + B + C \cos x + D \sin x + \frac{x^4}{12} - x^2.$$

Svar: $y = y_h + y_p = Ax + B + C \cos x + D \sin x + \dfrac{x^4}{12} - x^2$.

2 (b). Eftersom $(x^3)' = 3x^2$ är e^{x^3} en integrerande faktor:

$$\left(\mathrm{e}^{x^3} y\right)' = \mathrm{e}^{x^3}(y' + 3x^2 y) = \mathrm{e}^{x^3} \cdot 6x^2,$$

vilket ger

$$\mathrm{e}^{x^3} y = \int 6x^2 \mathrm{e}^{x^3}\, dx = 2\mathrm{e}^{x^3} + C.$$

Alltså har vi

$$y = 2 + C\mathrm{e}^{-x^3}.$$

Svar: $y = 2 + C\mathrm{e}^{-x^3}$.

3 (a).

$$\begin{aligned}\frac{x^4}{\sin(x^2) + 2\cos x - 2} &= \frac{x^4}{(x^2 + \mathcal{O}(x^6)) + 2(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \mathcal{O}(x^6)) - 2} \\ &= \frac{x^4}{2\frac{x^4}{24} + \mathcal{O}(x^6)} = \frac{12}{1 + \mathcal{O}(x^2)} \to 12 \text{ då } x \to 0.\end{aligned}$$

Svar: 12.

3 (b). Med variabelbytet $x = 1 + t$ så går t mot 0 då x går mot 1 och vi får:

$$\begin{aligned}\frac{1 - x + \ln x}{x^2 - 2x + 1} &= \frac{1 - (1+t) + \ln(1+t)}{(1+t)^2 - 2(1+t) + 1} \\ &= \frac{-t + (t - t^2/2 + \mathcal{O}(t^3))}{t^2} = \frac{-t^2/2 + \mathcal{O}(t^3)}{t^2} = \frac{-1/2 + \mathcal{O}(t)}{1} \to -\frac{1}{2} \text{ då } t \to 0.\end{aligned}$$

Svar: $-1/2$.

3 (c). Eftersom $\arctan s = s + \mathcal{O}(s^3)$ och $\mathrm{e}^t = 1 + t + t^2/2 + \mathcal{O}(t^3)$ får vi med $s = x^2$ först $\arctan x^2 = x^2 + \mathcal{O}(x^6)$ och sedan med $t = x^2 + \mathcal{O}(x^6)$

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{\arctan x^2} - x^2 &= \mathrm{e}^{x^2 + \mathcal{O}(x^6)} - x^2 = 1 + (x^2 + \mathcal{O}(x^6)) + \frac{1}{2}(x^2 + \mathcal{O}(x^6))^2 + \mathcal{O}((x^2 + \mathcal{O}(x^6))^3) - x^2 = \\ &= 1 + \frac{1}{2}x^4 + \mathcal{O}(x^6) = 1 + x^4\left(\frac{1}{2} + \mathcal{O}(x^2)\right).\end{aligned}$$

Eftersom både x^4 och $\frac{1}{2} + \mathcal{O}(x^2)$ är positiva nära $x = 0$ följer det att vi har ett lokalt minimum i $x = 0$.

Svar: Lokalt minimum.

4 (a).

$$\sqrt[k]{\left|\frac{(2k+3)x^{2k}}{9^k}\right|} = \frac{\sqrt[k]{2k+3}\,|x|^2}{9} \to \frac{|x|^2}{9} \text{ då } k \to \infty.$$

Detta ger konvergens då $|x|^2/9 < 1$ (dvs $-\sqrt{9} = -3 < x < 3 = \sqrt{9}$) och divergens då $|x^2|/9 > 1$ enligt rotkriteriet.

I båda ändpunkterna $x = \pm 3$ får vi samma serie $\sum_{k=1}^{\infty}(2k+3)$. Eftersom termerna inte går mot noll är denna divergent enligt divergenstestet.

Svar: $-3 < x < 3$.

4 (b).

$$\begin{aligned}f(\sqrt{3}) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k+3)(\sqrt{3})^{2k}}{9^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k+3}{3^k} \\ &\geq \sum_{k=1}^{3} \frac{2k+3}{3^k} = \frac{2+3}{3} + \frac{4+3}{9} + \frac{6+3}{27} = \frac{75}{27} = \frac{25}{9} = \frac{50-45}{18} + \frac{5}{2} \geq \frac{5}{2},\end{aligned}$$

där vi använt att alla termerna i serien är positiva.

5. Med $f(x) = (1+2x)^{1/2}$ får vi

$$f'(x) = (1+2x)^{-1/2},\ f''(x) = -(1+2x)^{-3/2},\ f'''(x) = 3(1+2x)^{-5/2},$$

så

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(\xi)}{6}x^3 = 1 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{3(1+2\xi)^{-5/2}}{3!}x^3$$

för något ξ mellan 0 och x.

Vi noterar nu att

$$f(-1/4) = \frac{23}{32} + \frac{3(1+2\xi)^{-5/2}}{3!}(-1/4)^3 = \frac{23}{32} - \frac{1}{2^7(1+2\xi)^{5/2}},$$

för något ξ mellan 0 och $-1/4$.

Så

$$\left|f(-1/4) - \frac{23}{32}\right| = \left|-\frac{1}{2^7(1+2\xi)^{5/2}}\right| = \frac{1}{2^7(1+2\xi)^{5/2}} \leq \frac{1}{2^7 \cdot (1+2(-1/4))^{5/2}} = \frac{2^2\sqrt{2}}{2^7} = \frac{\sqrt{2}}{32} \leq \frac{2}{32} = \frac{1}{16},$$

där vi använt att nämnaren aldrig blir mindre än när vi byter ut ξ mot $-1/4$ (eftersom $-1/4 \leq \xi \leq 0$).

Svar: $f(x) = 1 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{3(1+2\xi)^{-5/2}}{3!}x^3$ för något ξ mellan 0 och x.

6. Integralen är generaliserad i både 0 och ∞:

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx = \int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx + \int_1^\infty \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx.$$

Eftersom

$$\left|\frac{\cos x}{\sqrt{x}}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{x}},$$

och

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$

är konvergent följer det av jämförelseprincipen att

$$\int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx$$

är absolutkonvergent, och därmed konvergent. Vi noterar nu att

$$\int_1^T \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx = \left[\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right]_1^T + \int_1^T \frac{\sin x}{2x^{3/2}}\,dx.$$

Vi har att

$$\left[\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right]_1^T = \frac{\sin T}{\sqrt{T}} - \frac{\sin 1}{1} \to \frac{-\sin 1}{1} \text{ då } T \to \infty.$$

Vidare har vi att eftersom

$$\left|\frac{\sin x}{2x^{3/2}}\right| \leq \frac{1}{x^{3/2}},$$

och

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^{3/2}}\,dx$$

är konvergent så följer det att

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{2x^{3/2}}\,dx$$

är absolutkonvergent. Med andra ord existerar gränsvärdet (ändligt):

$$\lim_{T\to\infty} \int_1^T \frac{\sin x}{2x^{3/2}}\,dx,$$

och med andra ord är även

$$\int_1^\infty \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx$$

konvergent.

Svar: Konvergent.

7. Vi noterar att om $y(x)$ löser $y^m y' = x^n$ så måste vi ha

$$\int y^m\,dy = \frac{y^{m+1}}{m+1} = \int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c,$$

och om $y(0) = 0$ måste vidare $c = 0$. Det vill säga $y = y(x)$ måste uppfylla

$$y^{m+1} = \frac{m+1}{n+1}x^{n+1}. \tag{1}$$

Vi delar upp problemet i udda respektive jämna n.

För udda n noterar vi att

$$\frac{x^{n+1}}{n+1} \geq 0,$$

så

$$\sqrt[m+1]{\frac{m+1}{n+1}} \cdot \sqrt[m+1]{x^{n+1}}$$

är väldefinierat för alla m. Om vidare m är udda så har ekvationen (1) lösningarna

$$y(x) = \pm \sqrt[m+1]{\frac{m+1}{n+1}} \cdot \sqrt[m+1]{x^{n+1}},$$

men för m jämnt har vi bara en lösning:

$$y(x) = \sqrt[m+1]{\frac{m+1}{n+1}} \cdot \sqrt[m+1]{x^{n+1}}.$$

(Notera dock i fallet att m är udda att vi eventuellt kan skarva ihop lösningarna i origo, men mer om det nedan.)

Om nu n är jämnt noterar vi att

$$\frac{x^{n+1}}{n+1} < 0 \text{ för } x < 0,$$

så det kan bara finnas lösningar till (1) om också m är jämnt. I så fall är

$$y(x) = \sqrt[m+1]{\frac{m+1}{n+1}} \cdot \sqrt[m+1]{x^{n+1}}$$

väldefinierat.

Vi noterar nu att funktionen $\sqrt[m+1]{x^{n+1}}$ är deriverbar i origo om och endast om $(n+1)/(m+1) \geq 1$, vilket alltså ger att vi också måste ha $m \leq n$ i alla ovanstående fall för att lösningarna ovan till (1) verkligen ska lösa vår differentialekvation.

Slutligen noterar vi att i fallen då både m och n är udda, och om $m < n$, då är derivatan av $\sqrt[m+1]{\frac{m+1}{n+1}} \cdot \sqrt[m+1]{x^{n+1}}$ noll i origo (men inte om $m = n$), och i dessa fall kan vi skarva ihop lösningar.

Svar:

Om $m = n$ och m, n udda: $y(x) = \pm x$ (två lösningar).

Om $m < n$ och m, n udda: $y(x) = \begin{cases} \pm \sqrt[m+1]{\frac{m+1}{n+1}} \cdot \sqrt[m+1]{x^{n+1}} & x \geq 0, \\ \pm \sqrt[m+1]{\frac{m+1}{n+1}} \cdot \sqrt[m+1]{x^{n+1}} & x < 0 \end{cases}$ (fyra lösningar).

Om $m \leq n$ och m jämnt $y(x) = \sqrt[m+1]{\frac{m+1}{n+1}} \cdot \sqrt[m+1]{x^{n+1}}$ (en lösning).

Om $m > n$ eller om n är jämnt men m är udda så saknas lösning.