Lösningsförslag envariabelanalys 2 2021-06-05 8–13

1. (a) Vi behöver standardutvecklingarna

$$\arctan t = t - \frac{t^3}{3} + O(t^5) \quad \text{och} \quad \sin t = t - \frac{t^3}{6} + O(t^5).$$

Med hjälp av dessa kan vi uttrycka täljaren (med $t = x^2$ så $x \to 0 \;\Rightarrow\; t \to 0$) som

$$\arctan(x^2) - \sin(x^2) = x^2 - \frac{x^6}{3} + O(x^{10}) - \left(x^2 - \frac{x^6}{6} + O(x^{10})\right) = -\frac{x^6}{6} + O(x^{10}),$$

vilket visar att

$$\frac{\arctan(x^2) - \sin(x^2)}{x^6} = \frac{-\frac{x^6}{6} + O(x^{10})}{x^6} = -\frac{1}{6} + O(x^4) \to -\frac{1}{6}, \quad \text{då } x \to 0.$$

(b) Låt $f(x) = \sqrt{x+1} = (x+1)^{1/2}$. Då är

$$f'(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{-1/2} \quad \text{och} \quad f''(x) = -\frac{1}{4}(x+1)^{-3/2}.$$

Således blir $f(3) = \sqrt{4} = 2$, $f'(3) = 1/4$ och $f''(3) = -1/32$. Taylors formel kring $x = 3$ – med restterm på ordo-form – ger då att

$$\begin{aligned} f(x) &= f(3) + f'(3)(x-3) + \frac{f''(3)}{2}(x-3)^2 + O((x-3)^3) \\ &= 2 + \frac{1}{4}(x-3) - \frac{1}{64}(x-3)^2 + O((x-3)^3). \end{aligned}$$

(c) Vi behöver standardutvecklingarna

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + O(x^6) \quad \text{och} \quad \begin{aligned} \sqrt{1+t} &= 1 + \frac{t}{2} + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2}t^2 + O(t^3) \\ &= 1 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{8} + O(t^3). \end{aligned}$$

Med hjälp av dessa kan vi (med $t = x^2$ så $x \to 0 \;\Rightarrow\; t \to 0$) uttrycka

$$\begin{aligned} \sqrt{1+x^2}\cos(x) &= \left(1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + O(x^6)\right)\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + O(x^6)\right) \\ &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + O(x^6) + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} + O(x^6) - \frac{x^4}{8} + O(x^6) \\ &= 1 - \frac{x^4}{3} + O(x^6) = 1 + x^4\left(-\frac{1}{3} + O(x^2)\right) \end{aligned}$$

så ser vi att för x nära 0 blir parentesen negativ och då $x^4 \geq 0$ med likhet endast om $x = 0$ så måste vi ha ett lokalt maximum i $x = 0$ eftersom funktionsvärdet minskar från $f(0) = 1$ i båda riktningarna.

Svar: (a) $-\frac{1}{6}$ (b) $2 + \frac{1}{4}(x-3) - \frac{1}{64}(x-3)^2 + O((x-3)^3)$ (c) ett lokalt maximum.

2. Ekvationen är linjär och har det karakteristiska polynomet

$$p(r) = r^3 + r^2 + 3r - 5 = (r-1)(r^2 + 2r + 5) = (r-1)(r+1-2i)(r+1+2i).$$

Således ges lösningarna (på reell form) till den homogena ekvationen $p(D)y_h = 0$ av

$$y_h = C_1 e^x + e^{-x}\left(C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x\right)$$

enligt känd sats. Vi söker en partikulärlösning så att

$$p(D)y_{p_1} = 25x.$$

Vi ansätter $y_{p_1} = Ax + B$. Insatt i ekvationen ger detta

$$p(D)(Ax+B) = 3A - 5(Ax+B) = 25x,$$

så $3A - 5B = 0$ och $-5A = 25$. Vi finner därmed att $A = -5$ och $B = -3$, så $y_{p_1} = -5x - 3$. Vi söker även en partikulärlösning så att

$$p(D)y_{p_2} = 4e^{-x}$$

så vi ansätter $y_{p_2} = Ce^{-x}$. Insatt i ekvationen ger detta

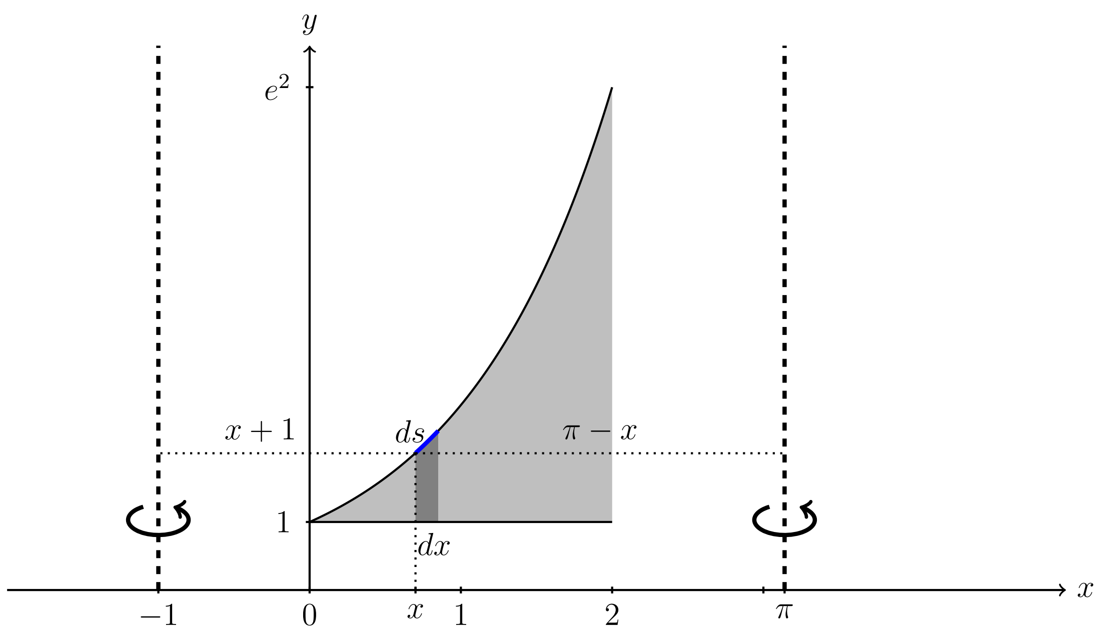
$$\big(-C + C - 3C - 5C\big)e^{-x} = 4e^{-x} \quad \Leftrightarrow \quad C = -\frac{1}{2},$$

så $y_{p_2} = -e^{-x}/2$. Vi finner därmed den allmänna lösningen

$$y = y_h + y_{p_1} + y_{p_2} = C_1 e^x + e^{-x}\left(C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x\right) - 5x - 3 - \frac{1}{2}\,e^{-x}.$$

Svar: $y = C_1 e^x + e^{-x}\left(C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x - \dfrac{1}{2}\right) - 5x - 3$, där C_1, C_2, C_3 är godtyckliga konstanter.

3. Vi börjar med att rita en figur vi kan använda i båda deluppgifterna.



(a) Vid rotation kring $x=-1$ så uppstår vid punkten x en cylinder som har radie $x+1$ och höjd e^x-1. Genom att multiplicera mantelarean för denna cylinder med en liten tjocklek dx så erhåller vi volymselementen

$$dV(x)=2\pi(x+1)(e^x-1)\,dx.$$

Vi summerar volymselementen och ser via partialintegration att

$$\begin{aligned}
V &= \int_0^2 dV(x) = 2\pi\int_0^2 (x+1)(e^x-1)\,dx \\
&= 2\pi\left[(x+1)\left(e^x-x\right)\right]_0^2 - 2\pi\int_0^2 \left(e^x-x\right)\,dx \\
&= 2\pi\left[(x+1)\left(e^x-x\right)-e^x+\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = 4\pi\left(e^2-2\right).
\end{aligned}$$

(b) Bågelementet finner vi enligt

$$ds=\sqrt{1+y'(x)^2}\,dx=\sqrt{1+(e^x)^2}\,dx=\sqrt{1+e^{2x}}\,dx.$$

När ds roterar ett varv kring $x=\pi$ så uppstår ett band med längden $2\pi(\pi-x)$ och bredden ds. Vi får därmed ett areaelement

$$dA(x)=2\pi(\pi-x)ds=2\pi(\pi-x)\sqrt{1+e^{2x}}\,dx,\quad 0\le x\le 2.$$

Vi finner därför att rotationsarean kan beskrivas enligt

$$A=\int_0^2 dA(x)=2\pi\int_0^2(\pi-x)\sqrt{1+e^{2x}}\,dx.$$

Svar: (a) $4\pi\left(e^2-2\right)$ (b) $2\pi\displaystyle\int_0^2(\pi-x)\sqrt{1+e^{2x}}\,dx.$

4. (a) Eftersom

$$\frac{k}{k+1}\exp\left(\frac{k+1}{k}\right)=\frac{1}{1+1/k}\exp\left(1+\frac{1}{k}\right)\to 1\cdot e^1=e\neq 0$$

då $k\to\infty$ så är serien divergent enligt divergenstestet (för att kunna ha konvergens är det *nödvändigt* att termerna går mot noll).

(b) Vi använder rottestet och ser att

$$\begin{aligned}
\left|\frac{4^n\ln n}{n^3}x^{2n}\right|^{1/n} &= 4|x|^2\left(\frac{\ln n}{n^3}\right)^{1/n} = 4|x|^2\exp\left(\frac{1}{n}\ln\frac{\ln n}{n^3}\right) \\
&= 4|x|^2\exp\left(\frac{\ln\ln n}{n}-3\frac{\ln n}{n}\right)\to 4|x|^2e^0=4|x|^2,\ \text{då } n\to\infty,
\end{aligned}$$

så om $4|x|^2<1$ är serien absolutkonvergent och om $4|x|^2>1$ är serien divergent. Eftersom

$$4|x|^2<1\quad\Leftrightarrow\quad |x|<\frac{1}{2}$$

ser vi att konvergensradien är $1/2$.

För $x = \pm 1/2$ får vi serien

$$0 < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

eftersom $\ln n < n$ för $n \geq 1$. Då $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ är konvergent följer det av jämförelsesats att även $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3}$ är konvergent.

Svar: (a) divergent (b) serien är konvergent för $|x| \leq 1/2$ (och annars divergent).

5. Integralen är generaliserad i både 0 och ∞.

För $0 \leq x \leq 1$ så gäller att $0 \leq x \leq \sqrt{x}$ och $0 \leq x^4 \leq x$, så

$$\int_0^1 \frac{x + \sqrt{x}}{x + x^4}\, dx \geq \int_0^1 \frac{x + x}{x + x}\, dx = 1$$

och

$$\int_0^1 \frac{x + \sqrt{x}}{x + x^4}\, dx \leq \int_0^1 \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x}}{x + 0}\, dx = \int_0^1 \frac{2}{\sqrt{x}}\, dx = \left[4\sqrt{x}\right]_0^1 = 4.$$

Vi noterar att då integranden är positiv så gäller även att

$$\int_0^{\infty} \frac{x + \sqrt{x}}{x + x^4}\, dx \geq \int_0^1 \frac{x + \sqrt{x}}{x + x^4}\, dx \geq 1,$$

vilket är precis den vänstra olikheten vi ville visa. Vidare ser vi att för $x \geq 1$ så är $\sqrt{x} \leq x$, vilket medför att

$$\int_1^{\infty} \frac{x + \sqrt{x}}{x + x^4}\, dx \leq \int_1^{\infty} \frac{x + x}{0 + x^4}\, dx = \int_1^{\infty} \frac{2}{x^3}\, dx = \left[-\frac{1}{x^2}\right]_1^{\infty} = 1.$$

Således gäller att

$$\int_0^{\infty} \frac{x + \sqrt{x}}{x + x^4}\, dx \leq \int_0^1 \frac{x + \sqrt{x}}{x + x^4}\, dx + \int_1^{\infty} \frac{x + \sqrt{x}}{x + x^4}\, dx \leq 4 + 1 = 5,$$

vilket bevisar den högra olikheten i uppgiften.

Svar: Se ovan.

6. Vi observerar först att om $x = 0$ så står det att

$$2y(0) + 6 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y(0) = -3.$$

Vi deriverar ekvationen och finner att

$$2y'(x) = 1 - y(x)^2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2y'}{y^2 - 1} = -1,$$

där vi behöver anta att $y \neq \pm 1$. Vi kan notera att $y = \pm 1$ faktiskt löser ekvationen, så vi får vara lite försiktiga senare. Eftersom ekvationen är separabel så gäller att

$$
\begin{aligned}
\frac{2y'}{y^2-1} = -1 \quad &\Leftrightarrow \quad 2\left(\frac{1/2}{y-1} - \frac{1/2}{y+1}\right) y' = -1 \\
&\Leftrightarrow \quad \int \left(\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y+1}\right) dy = -\int dx \\
&\Leftrightarrow \quad \ln|y-1| - \ln|y+1| = \ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right| = -x + C \\
&\Leftrightarrow \quad \left|\frac{y-1}{y+1}\right| = e^C e^{-x} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y-1}{y+1} = \pm e^C e^{-x} = De^{-x},
\end{aligned}
$$

där $D \neq 0$ är en godtycklig konstant. Eftersom $y(0) = -3$ kan vi bestämma D genom att observera att

$$
\frac{-3-1}{-3+1} = De^0 = D \quad \Leftrightarrow \quad D = 2.
$$

Alltså blir

$$
\begin{aligned}
\frac{y-1}{y+1} = 2e^{-x} \quad &\Rightarrow \quad (y-1) = 2(y+1)e^{-x} \quad \Leftrightarrow \quad y(1-2e^{-x}) = 1 + 2e^{-x} \\
&\Leftrightarrow \quad y = \frac{1+2e^{-x}}{1-2e^{-x}} = \frac{e^x+2}{e^x-2}
\end{aligned}
$$

under förutsättning att $e^x \neq 2$. Eftersom vi har ett villkor i $x = 0$ ges det största möjliga intervallet där denna lösning är definierad av

$$
e^x < 2 \quad \Leftrightarrow \quad x < \ln 2.
$$

Svar: $y = \dfrac{e^x+2}{e^x-2}$, $x < \ln 2$.

7. De första $2^{n+1} - 1$ termerna i serien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ kan – eftersom a_k är en avtagande följd – skrivas

$$
\begin{aligned}
&a_1 + \underbrace{(a_2 + a_3)}_{2^1 \text{ termer}} + \underbrace{(a_4 + a_5 + a_6 + a_7)}_{2^2 \text{ termer}} + \cdots + \underbrace{(a_{2^n} + a_{2^n+1} + \cdots + a_{2^{n+1}-1})}_{2^n \text{ termer}} \\
&\leq a_1 + 2^1 a_2 + 2^2 a_4 + \cdots + 2^n a_{2^n}
\end{aligned}
$$

ur vilket det följer att om $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ är konvergent så är även $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent enligt jämförelsesats. På liknande sätt kan vi skriva de första 2^n termerna enligt

$$
\begin{aligned}
&a_1 + a_2 + \underbrace{(a_3 + a_4)}_{2^1 \text{ termer}} + \underbrace{(a_5 + a_6 + a_7 + a_8)}_{2^2 \text{ termer}} + \cdots + \underbrace{(a_{2^{n-1}} + a_{2^{n-1}+1} + \cdots + a_{2^n})}_{2^{n-1} \text{ termer}} \\
&\geq a_1 + a_2 + 2a_4 + 2^2 a_8 + \cdots + 2^{n-1} a_{2^n} \geq \frac{1}{2}\left(a_1 + 2^1 a_2 + 2^2 a_4 + 2^3 a_8 + \cdots + 2^n a_{2^n}\right)
\end{aligned}
$$

så om $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ är divergent så är även $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergent enligt jämförelsesats.

Svar: Se ovan.