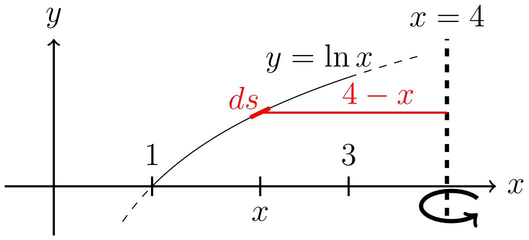
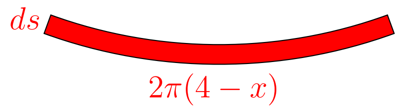
Lösningsförslag Envariabelanalys 2 2021-08-26, em

1. (a) Vi skall rotera kurvan $y = \ln x$, $1 \leq x \leq 3$ ett varv kring linjen $x = 4$.Vi börjar med en tydlig figur.





Areaelementet dA som uppkommer då ds roterar ett varv runt $x = 4$ blir

$$dA = 2\pi(4 - x)ds.$$

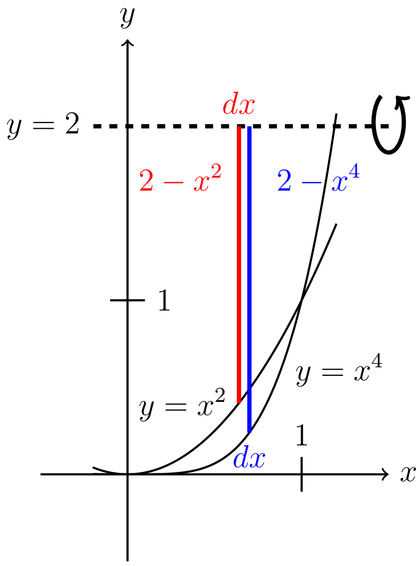
Vidare, med $f(x) = \ln x$ är $f'(x) = 1/x$ så att

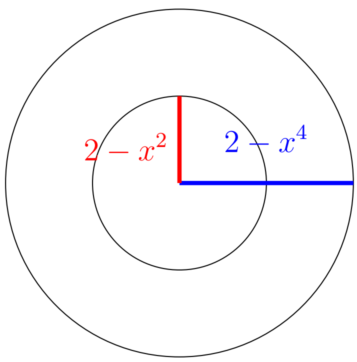
$$ds = \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx = \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\, dx$$

vilket ger

$$A = \int dA = 2\pi \int_1^3 (4 - x)\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\, dx.$$

(b) Vi skall rotera området $x^4 \leq y \leq x^2$, $0 \leq x \leq 1$ ett varv kring $y = 2$. Vi börjar återigen med en tydlig figur.





Om vi roterar en tunn remsa mellan $y = x^4$ och $y = 2$ fås en tunn cirkelskiva med volym $dV_1 = \pi\left(2 - x^4\right)^2 dx$. På samma sätt då vi roterar en tunn remsa mellan $y = x^2$ och $y = 2$ fås en tunn cirkelskiva med volym $dV_2 = \pi\left(2 - x^2\right)^2 dx$. Det sökta volymselementet fås då som

$$\begin{aligned} dV = dV_1 - dV_2 &= \pi\left(\left(2 - x^4\right)^2 - \left(2 - x^2\right)^2\right) dx = \\ &= \pi\left(4 - 4x^4 + x^8 - \left(4 - 4x^2 + x^4\right)\right) dx = \pi\left(4x^2 - 5x^4 + x^8\right) dx. \end{aligned}$$

Den sökta volymen blir då

$$V = \int dV = \pi \int_0^1 \left(4x^2 - 5x^4 + x^8\right) dx = \pi \left[\frac{4}{3}x^3 - x^5 + \frac{1}{9}x^9\right]_0^1 =$$
$$= \pi \left(\frac{4}{3} - 1 + \frac{1}{9}\right) = \frac{4\pi}{9}.$$

<u>Svar</u>: (a) $A = 2\pi \int_1^3 (4-x)\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\,dx$, (b) $V = \frac{4\pi}{9}$.

2. Det karakteristiska polynomet och den karakteristiska ekvationen blir

$$P(r) = r^3 + r^2 - 9r - 9 = r^2(r+1) - 9(r+1) = (r+1)(r^2-9) =$$
$$= (r+1)(r+3)(r-3) = 0 \iff r = -1, \pm 3 \implies$$
$$\implies y_h = A\mathrm{e}^{-x} + B\mathrm{e}^{-3x} + C\mathrm{e}^{3x}.$$

Då ekvationens högerled, e^{3x}, är en lösning till den homogena ekvationen ansätter vi $y_p = \mathrm{e}^{3x}z(x)$ använder förskjutningsregeln (går förstås bra att beräkna y_p' och y_p'' var för sig och sätta in i ekvationen). Vi får

$$P(D)y_p = P(D)(\mathrm{e}^{3x}z(x)) = \mathrm{e}^{3x}P(D+3)z = \mathrm{e}^{3x} \iff$$
$$P(D+3)z = ((D+3)+1)((D+3)+3)((D+3)-3)z = (D+4)(D+6)Dz =$$
$$= (D^2 + 10D + 24)Dz = (D^3 + 10D^2 + 24D)z =$$
$$= z''' + 10z'' + 24z' = 1$$

och vi ser här att $z = x/24$ är *en* lösning till ekvationen så att $y_p = x\mathrm{e}^{3x}/24$. Följaktligen,

$$y = y_h + y_p = A\mathrm{e}^{-x} + B\mathrm{e}^{-3x} + \left(C + \frac{x}{24}\right)\mathrm{e}^{3x}.$$

<u>Svar</u>: $y = A\mathrm{e}^{-x} + B\mathrm{e}^{-3x} + \left(C + \frac{x}{24}\right)\mathrm{e}^{3x}$.

3. (a) Vi använder rotkriteriet

$$|a_k|^{1/k} = \left|\frac{x^{3k}}{k8^k}\right|^{1/k} = \frac{|x|^3}{k^{1/k}8} \to \frac{|x|^3}{8}$$

då $k \to \infty$ eftersom $k^{1/k} \to 1$ då $k \to \infty$. Rotkriteriet ger då att serien är absolutkonvergent om gränsvärdet ovan $\frac{|x|^3}{8} < 1$ och divergent om $\frac{|x|^3}{8} > 1$, d.v.s. absolutkonvergent om $|x| < 2$ och divergent om $|x| > 2$. Återstår att undersöka $|x| = 2$, d.v.s. $x = \pm 2$. Vi får

$$\underline{x = 2}: \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{3k}}{k8^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k},$$
$$\underline{x = -2}: \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-2)^{3k}}{k8^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}.$$

Serien som fås då $x = 2$ är standardexemplet på en divergent serie och serien som fås för $x = -2$ är standardexemplet på en serie vars konvergens ges av Leibniz kriterium: serien är alternerande och termernas belopp, $1/k$, avtar mot 0 då $k \to \infty$.
Potensserien är alltså konvergent om $-2 \le x < 2$ och divergent för alla andra $x \in \mathbb{R}$.

(b) Om vi i en kvot med positiv täljare resp. nämnare, minskar nämnaren så blir kvotens värde större. Följaktligen,

$$\int_1^\infty \frac{x^2+7x}{x^5+3}\,dx \le \int_1^\infty \frac{x^2+7x}{x^5}\,dx = \int_1^\infty \left(\frac{1}{x^3}+\frac{7}{x^4}\right)dx = \left[-\frac{1}{2x^2}-\frac{7}{3x^3}\right]_1^\infty =$$
$$= \frac{1}{2}+\frac{7}{3} = \frac{3+14}{6} = \frac{17}{6} < \frac{18}{6} = 3 < 4. \qquad \textit{V.S.B.}$$

<u>Svar:</u> (a) Konvergent om och endast om $-2 \le x < 2$, (b) Se ovan.

4. För att få fram den sökta utvecklingen behöver vi ta fram f:s derivator t.o.m. ordning 3.

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2+\sin\frac{x}{3}, & f(0) &= 0,\\ f'(x) &= 2x+\frac{1}{3}\cos\frac{x}{3}, & f'(0) &= \frac{1}{3},\\ f''(x) &= 2-\frac{1}{9}\sin\frac{x}{3}, & f''(0) &= 2,\\ f'''(x) &= -\frac{1}{27}\cos\frac{x}{3}, & f'''(\xi) &= -\frac{1}{27}\cos\frac{\xi}{3}. \end{aligned}$$

Insättning i Maclaurinsformel ger

$$f(x) = f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+\frac{f'''(\xi)}{3!}x^3 = \frac{1}{3}x+\frac{2}{2}x^2-\frac{\cos\frac{\xi}{3}}{27\cdot 3!}x^3 =$$
$$= \frac{1}{3}x+x^2-\frac{\cos\frac{\xi}{3}}{162}x^3$$

för något ξ mellan 0 och x. Detta ger

$$f(-1) = \frac{1}{3}(-1)+(-1)^2-\frac{\cos\frac{\xi}{3}}{162}(-1)^3 = \frac{2}{3}+\frac{\cos\frac{\xi}{3}}{162}$$

för något ξ mellan 0 och -1. Detta ger

$$\left|f(-1)-\frac{2}{3}\right| = \left|\frac{2}{3}+\frac{\cos\frac{\xi}{3}}{162}-\frac{2}{3}\right| = \left|\frac{\cos\frac{\xi}{3}}{162}\right| \le \frac{1}{162} \le \frac{1}{100}$$

då $|\cos\frac{\xi}{3}| \le 1$ för alla $\xi \in \mathbb{R}$.

5. Ekvationen är separabel. Om vi antar $y \neq -1$ så gäller

$$y' = \frac{\cos x}{2y+2} \iff 2(y+1)y' = \cos x \iff$$
$$\iff 2\int (y+1)dy = (y+1)^2 = \int \cos x\,dx = \sin(x)+C.$$

Insättning av begynnelsevillkoret $y(0) = -\dfrac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ ger

$$(y(0)+1)^2 = \left(-\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}+1\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{2}-1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2} = \sin 0 + C = C,$$
$$(y+1)^2 = \sin(x)+\frac{1}{2} \iff y = -1\pm\sqrt{\frac{1}{2}+\sin(x)}.$$

Då $y(0) < -1$ följer det att

$$y = -1 - \sqrt{\frac{1}{2} + \sin(x)}.$$

För att lösningen skall vara definierad krävs $\frac{1}{2} + \sin(x) > 0$. Det måste vara strikt olikhet ty annars blir $y = -1$ och då får vi division med 0 i den ursprungliga ekvationen. För att hitta lösningens definitionsmängd löser vi

$$\frac{1}{2} + \sin x = 0 \iff \sin x = -\frac{1}{2} \iff x = \begin{cases} -\frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi, \\ \pi - \left(-\frac{\pi}{6}\right) + k \cdot 2\pi = \frac{7\pi}{6} + k \cdot 2\pi \end{cases}$$

Då begynnelsevärdet var lösningens värde för $x = 0$ skall lösningen vara definierad i ett *intervall* som innehåller $x = 0$. Ovanstående kalkyl ger då att lösningen är definierad på intervallet $\left]-\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right[$.

<u>Svar</u>: $y = -1 - \sqrt{\frac{1}{2} + \sin(x)}, \quad -\frac{\pi}{6} < x < \frac{7\pi}{6}.$

6. Ansätt $y = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ och antag att serien har positiv konvergensradie. Då är serien deriverbar oändligt många gånger, derivatorna beräknas genom att derivera seriens termer och alla de deriverade serierna har samma konvergensradie enligt Sats 10.16, sid 465 i boken. Vi får

$$y' = D\left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k\right) = D\left(c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k x^k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k-1},$$

$$y'' = D(y') = D\left(\sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k-1}\right) = D\left(c_1 + \sum_{k=2}^{\infty} k c_k x^{k-1}\right) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) c_k x^{k-2}.$$

Insättning i ekvationen ger

$$x^2 y'' - 2xy' + (4x^2 + 2)y = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) c_k x^k - \sum_{k=1}^{\infty} 2k c_k x^k + \sum_{k=0}^{\infty} 2 c_k x^k + \sum_{k=0}^{\infty} 4 c_k x^{k+2}. \tag{1}$$

Omsummation av den sista summan ger

$$\sum_{k=0}^{\infty} 4 c_k x^{k+2} = 4c_0 x^2 + 4c_1 x^3 + \ldots = \sum_{k=2}^{\infty} 4 c_{k-2} x^k$$

som i (1) ger

$$\sum_{k=2}^{\infty} [(k(k-1) - 2k + 2) c_k + 4 c_{k-2}] x^k - 2c_1 x + 2c_0 + 2c_1 x =$$

$$= 2c_0 + \sum_{k=2}^{\infty} [(k^2 - 3k + 2) c_k + 4 c_{k-2}] x^k =$$

$$= 2c_0 + 4c_0 x^2 + \sum_{k=3}^{\infty} [(k-2)(k-1) c_k + 4 c_{k-2}] x^k = 0.$$

(Notera att vi valde att plocka ut termen för $k = 2$ ur summan eftersom faktorn framför c_k, $(k-2)(k-1)$ blir 0 för $k = 2$.) Ovanstående ger då att alla koefficienter för x^k måste vara 0, d.v.s. $c_0 = 0$ och

$$(k-2)(k-1)c_k + 4c_{k-2} = 0 \iff c_k = \frac{-4}{(k-2)(k-1)}c_{k-2}, \ k \geq 3.$$

Eftersom c_k också är koefficienterna för x^k i Maclaurinutvecklingen av $y(x)$ fås att

$$c_1 = y'(0) = 1 \quad \text{och} \quad c_2 = \frac{y''(0)}{2} = -1$$

vilket ger

$$\underline{k=3}: \quad c_3 = \frac{-4}{(3-2)(3-1)}c_1 = -\frac{4}{2!} = -2, \quad \underline{k=4}: \quad c_4 = \frac{-4}{2 \cdot 3}c_2 = -\frac{4}{3!}(-1) = \frac{4}{3!} = \frac{2}{3},$$

$$\underline{k=5}: \quad c_5 = \frac{-4}{3 \cdot 4}c_3 = \frac{4^2}{4!} = \frac{2}{3}, \qquad \underline{k=6}: \quad c_6 = \frac{-4}{4 \cdot 5}c_4 = -\frac{4^2}{5!} = -\frac{2}{15}.$$

För att beräkna konvergensradien delar vi upp serien i udda och jämna potenser då rekursionsformeln hoppar två steg,

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k} x^{2k} + \sum_{k=1}^{\infty} c_{2k-1} x^{2k-1}.$$

Om vi börjar med serien med jämna potenser så fås med kvotkriteriet och rekursionsformeln ovan

$$\left| \frac{c_{2k}x^{2k}}{c_{2k-2}x^{2k-2}} \right| = |x|^2 \left| \frac{c_{2k}}{c_{2k-2}} \right| = \Big[2k = n \Big] = |x|^2 \left| \frac{c_n}{c_{n-2}} \right| = \frac{4|x|^2}{(n-2)(n-1)} \to 0$$

för alla $x \in \mathbb{R}$ då $2k = n \to \infty$. Följaktligen är serien med jämna potenser konvergent för alla $x \in \mathbb{R}$. För de udda potenserna fås

$$\left| \frac{c_{2k+1}x^{2k+1}}{c_{2k-1}x^{2k-1}} \right| = |x|^2 \left| \frac{c_{2k+1}}{c_{2k-1}} \right| = \Big[2k = n-1 \Big] = |x|^2 \left| \frac{c_n}{c_{n-2}} \right| = \frac{4|x|^2}{(n-2)(n-1)} \to 0$$

för alla $x \in \mathbb{R}$ då $2k-1 = n-1 \to \infty$. Följaktligen är serien med udda potenser konvergent för alla $x \in \mathbb{R}$. Då båda serierna är konvergenta för alla $x \in \mathbb{R}$ gäller samma sak för deras summa.

<u>Svar:</u> $c_0 = 0$, $c_1 = 1$, $c_2 = -1$, $c_3 = -2$, $c_4 = \frac{2}{3}$, $c_0 = 0$, $c_5 = \frac{2}{3}$, $c_6 = -\frac{2}{15}$, konvergensradie$= \infty$.

Anmärkning: Om man räknar ut några fler c_k och systematiserar lite mer kan man se att lösningen är $\quad y = x\cos 2x - \frac{x}{2}\sin 2x$

7. (a) Vi börjar med att observera

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \tag{2}$$

där den större serien är konvergent ($\alpha = 2 > 1$) enligt känd sats. Då båda serierna är positiva är den mindre serien konvergent för alla $a \in \mathbb{R}$. Ur (2) följer nu att

$$0 \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+a^2} = \Big[\text{båda konvergenta}\Big] = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^2+a^2}\right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+a^2-n^2}{n^2(n^2+a^2)} = a^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n^2+a^2)} \le a^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}.$$

Då $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ är konvergent ($\alpha = 4 > 1$) har den en summa $S \in \mathbb{R}$ så att

$$0 \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+a^2} \le a^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = a^2 S \to 0$$

då $a \to 0^+$, d.v.s.

$$\lim_{a\to 0^+} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+a^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

enligt instängningsregeln.

(b) Börja med att byta variabel, $t = \pi a$ och skriv om f till ett bråk.

$$f(a) = \frac{\pi a \coth \pi a - 1}{2a^2} = \Big[t = \pi a\Big] = \frac{t \coth t - 1}{2t^2/\pi^2} = \frac{\pi^2}{2} \cdot \frac{t\coth t - 1}{t^2} =$$

$$= \frac{\pi^2}{2} \cdot \frac{t\dfrac{e^{2t}+1}{e^{2t}-1} - 1}{t^2} = \frac{\pi^2}{2} \cdot \frac{t\left(e^{2t}+1\right) - \left(e^{2t}-1\right)}{t^2\left(e^{2t}-1\right)} =$$

$$= \frac{\pi^2}{2} \cdot \frac{(t-1)e^{2t}+1+t}{t^2\left(e^{2t}-1\right)}, \tag{3}$$

Maclaurinutveckla sedan nämnare och täljare separat med avseende på t

$$t^2\left(e^{2t}-1\right) = t^2\left(1+2t+\mathcal{O}(t^2)-1\right) = 2t^3 + \mathcal{O}(t^4) \quad \text{(grad 3 räcker i täljaren)}$$

$$(t-1)e^{2t}+1+t = (t-1)\left(1+2t+\frac{1}{2}(2t)^2 + \frac{1}{6}(2t)^3 + \mathcal{O}(t^4)\right) + 1 + t =$$

$$= (t-1)\left(1+2t+2t^2+\frac{4}{3}t^3+\mathcal{O}(t^4)\right) + 1 + t$$

$$= \cancel{t} - \cancel{1} + \cancel{2t^2} - \cancel{2t} + 2t^3 - \cancel{2t^2} - \frac{4}{3}t^3 + \underbrace{\frac{4}{3}t^4 + \mathcal{O}(t^4)}_{\mathcal{O}(t^4)} + \cancel{1} + \cancel{t} =$$

$$= \frac{2}{3}t^3 + \mathcal{O}(t^4).$$

Insättning i (3) ovan ger

$$\frac{\pi^2}{2} \cdot \frac{(t-1)e^{2t}+1+t}{t^2\left(e^{2t}-1\right)} = \frac{\pi^2}{2} \cdot \frac{\frac{2}{3}t^3 + \mathcal{O}(t^4)}{2t^3+\mathcal{O}(t^4)} = \frac{\pi^2}{6} \cdot \frac{1+\mathcal{O}(t)}{1+\mathcal{O}(t)} \to \frac{\pi^2}{6}$$

då $a = t/\pi \to 0^+$.

Svar: (a) Se ovan, (b) $\dfrac{\pi^2}{6}$