Lösningsförslag envariabelanalys 2 2021-08-26 8–13 FM

1. För $x > 0$ så gäller att

$$xy' - y = x^3 \cos x \quad \Leftrightarrow \quad y' - \frac{1}{x}\, y = x^2 \cos x.$$

Ekvationen är linjär och har ordning 1, så vi använder en integrerande faktor. Till exempel $\exp(-\ln x) = \dfrac{1}{x}$. Multiplikation med denna faktor visar att föregående ekvation är ekvivalent med

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left(\frac{y}{x}\right) = x \cos x \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{y}{x} = \int x \cos x \, dx = x \sin x - \int \sin x \, dx = x \sin x + \cos x + C \\ &\Leftrightarrow \quad y = x^2 \sin x + x \cos x + Cx. \end{aligned}$$

För att bestämma C så noterar vi att

$$y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2x \sin x + x^2 \cos x + \cos x - x \sin x + C\Big|_{x=\pi/2} = \pi + 0 + 0 - \frac{\pi}{2} + C = \frac{\pi}{2} + C = 0,$$

så $C = -\pi/2$.

Svar: $y(x) = x^2 \sin x + x \cos x - \dfrac{\pi x}{2}$, $x > 0$.

2. (a) Vi behöver standardutvecklingarna

$$\ln(1+t) = t + O(t^2), \quad \sin x = x - \frac{x^3}{6} + O(x^5) \quad \text{och} \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + O(x^4).$$

Med hjälp av dessa kan vi uttrycka nämnaren (med $t = x^4$ så $x \to 0 \;\Leftrightarrow\; t \to 0$) som

$$\ln(1 + x^4) = x^4 + O(x^8)$$

och täljaren som

$$x\left(x - \frac{x^3}{6} + O(x^5)\right) - x^2\left(1 - \frac{x^2}{2} + O(x^4)\right) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right) x^4 + O(x^6) = \frac{x^4}{3} + O(x^6),$$

vilket visar att

$$\frac{x \sin x - x^2 \cos x}{\ln(1 + x^4)} = \frac{\frac{x^4}{3} + O(x^6)}{x^4 + O(x^8)} = \frac{\frac{1}{3} + O(x^2)}{1 + O(x^4)} \to \frac{1}{3}, \quad \text{då } x \to 0.$$

(b) Med $t = x - 2$ (så att $x \to 2 \;\Leftrightarrow\; t \to 0$) kan vi skriva om bråket enligt

$$\frac{e^{x^2} - e^{4x-4}}{(x-2)^2} = \frac{e^{(t+2)^2} - e^{4(t+2)-4}}{t^2} = e^{4t+4} \cdot \frac{e^{t^2} - 1}{t^2} \to e^4 \cdot 1$$

enligt standardgränsvärdet $(e^s - 1)/s \to 1$ då $s \to 0$ (eller med hjälp av Maclaurin-utvecklingen $e^{t^2} = 1 + t^2 + \mathcal{O}(t^4)$).

(c) Vi behöver standardutvecklingarna

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + O(x^5) \quad \text{och} \quad \begin{aligned} \sqrt{1+t} &= 1 + \frac{t}{2} + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2}t^2 + O(t^3) \\ &= 1 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{8} + O(t^3). \end{aligned}$$

Med hjälp av dessa kan vi (med $t = x^2$ så $x \to 0 \ \Leftrightarrow \ t \to 0$) uttrycka

$$\begin{aligned} (\arctan x)^2 - 2\sqrt{1+x^2} &= \left(x - \frac{x^3}{3} + O(x^5)\right)^2 - 2\left(1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + O(x^6)\right) \\ &= x^2 - \frac{2x^4}{3} + O(x^6) - 2 - x^2 + \frac{x^4}{4} + O(x^6) \\ &= -2 - \frac{5x^4}{12} + O(x^6) = -2 + x^4\left(-\frac{5}{12} + O(x^2)\right) \end{aligned}$$

så ser vi att för x nära 0 blir parentesen negativ och då $x^4 \geq 0$ med likhet endast om $x = 0$ så måste vi ha ett lokalt maximum i $x = 0$ eftersom funktionsvärdet är mindre än $f(0) = -2$ i båda riktningarna.

Svar: (a) $\dfrac{1}{3}$ (b) e^4 (c) ett lokalt maximum.

3. (a) Serien är positiv och vi ser att termerna beter sig ungefär som $1/k^3$, så vi misstänker konvergens. Mycket riktigt så gäller att

$$0 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k+5}{k^4+7k^2} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{7k}{k^4} = 7\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$$

då $7k^2 \geq 0$ och $5 \leq 5k$ för $k \geq 1$. Den sista serien i högerledet är känt konvergent, så enligt jämförelsesats är även den efterfrågade serien konvergent.

(b) Integranden är positiv och vi ser här att termerna beter sig ungefär som $1/x^2$ när x är nära noll, så vi misstänker att integralen är divergent. Vi kan visa detta ordentligt genom att observera att

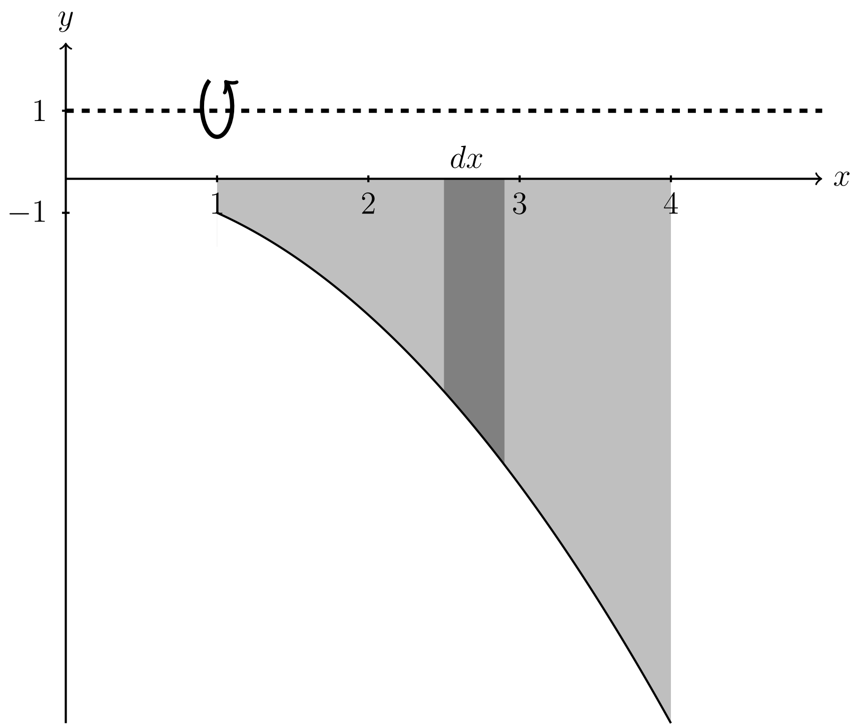
$$\int_0^1 \frac{2x+5}{x^4+7x^2}\,dx \geq \int_0^1 \frac{5}{8x^2}\,dx = \frac{5}{8}\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx$$

då $2x \geq 0$ och $x^4 \leq x^2$ för $0 < x < 1$. Den sista integralen i högerledet är divergent, så samma sak gäller även den efterfrågade integralen (enligt jämförelsesats).

(c) Eftersom $1/k^5$ är avtagande för $k \geq 1$ kan vi tolka serien från $k = 2$ som en undertrappa till integralen $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^5}$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^5} = 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^5} \leq 1 + \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^5} = 1 + \left[-\frac{1}{4x^4}\right]_1^{\infty} = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} \leq 2.$$

4. (a) Vi börjar med att rita en figur som beskriver situationen.



Vid rotation kring linjen $y = 1$ så uppstår vid punkten x en ihålig disk som har yttre radie $1 - (-x^2)$ och inre radie 1. Disken har tjockleken dx, så vi erhåller ett volymelement

$$dV(x) = \pi\big((1 + x^2)^2 - 1^2\big)\,dx = \pi(x^4 + 2x^2)\,dx.$$

Vi summerar volymelementen och finner därmed ett uttryck för volymen som uppstår vid rotationen:

$$V = \int_1^4 dV(x) = \pi \int_1^4 (x^4 + 2x^2)\,dx.$$

(b) Bågelementet finner vi enligt

$$\begin{aligned} ds(x) &= \sqrt{1 + y'(x)^2}\,dx = \sqrt{1 + \left(x - \frac{1}{4x}\right)^2}\,dx = \sqrt{\frac{16x^4 + 8x^2 + 1}{16x^2}}\,dx \\ &= \sqrt{\frac{(4x^2+1)^2}{(4x)^2}}\,dx = \left(x + \frac{1}{4x}\right)\,dx, \end{aligned}$$

där vi utnyttjar att $4x^2 + 1 \geq 0$ samt att $4x \geq 0$ för $1 \leq x \leq 2$. Vi finner därför att kurvlängden ges av

$$L = \int_1^2 ds(x) = \int_1^2 \left(x + \frac{1}{4x}\right)\,dx = \left[\frac{x^2}{2} + \frac{\ln x}{4}\right]_1^2 = \frac{3}{2} + \frac{\ln 2}{4}.$$

Svar: (a) $\pi \int_1^4 (x^4 + 2x^2)\,dx$ (b) $\frac{3}{2} + \frac{\ln 2}{4}$.

5. Ekvationen är linjär och har det karakteristiska polynomet $p(r) = r^2 + ar + b$. Genom att betrakta den allmänna lösningen så ser vi att lösningen till den homogena ekvationen måste vara $y_h = (Ax+B)e^{2x}$, vilket ger att $r = 2$ måste vara en dubbelrot till $p(r)$. Alltså blir
$$p(r) = (r-2)^2 = r^2 - 4r + 4.$$
Således måste $a = -4$ och $b = 4$. För att identifiera $h(x)$ så kan vi (eftersom $p(D)y_h = 0$) helt enkelt beräkna
$$p(D)x^4 = (D^2 - 4D + 4)x^4 = 12x^2 - 16x^3 + 4x^4.$$
Högerledet här är alltså $h(x)$.

Svar: $a = -4,\ b = 4,\ h(x) = 12x^2 - 16x^3 + 4x^4$.

6. Eftersom
$$e^t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}, \quad t \in \mathbf{R},$$
så kan vi skriva
$$e^{-x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} x^{2k}.$$
Denna potensserie har oändlig konvergensradie och vi får integrera serien termvis:
$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \int_0^1 x^{2k}\,dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{1}{2k+1}.$$
Härur följer det alltså att vi kan välja $a_k = \dfrac{(-1)^k}{(2k+1)\,k!}$ för $k = 0, 1, 2, \ldots$ Därmed kan vi approximera integralen med $\sum_{k=0}^{N} a_k$ för ett lämpligt valt N:
$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx = \underbrace{\sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{1}{2k+1}}_{\text{approximation}} + \underbrace{\sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{1}{2k+1}}_{\text{fel}}.$$
Vi vill att felet ska vara högst $1/1000$ och då serien är en alternerande Leibniz-serie (så termernas belopp avtar monotont till 0) så kan vi göra följande uppskattning:
$$\left| \sum_{k=N+1}^{\infty} a_k \right| \le |a_{N+1}| = \frac{1}{(2(N+1)+1)\,(N+1)!} = \frac{1}{(2N+3)\,(N+1)!}$$
så om
$$(2N+3)\,(N+1)! \ge 1000$$
blir felet högst $1/1000$. Genom att testa finner vi att $N = 4$ fungerar:
$$(2 \cdot 4 + 3)\,(4+1)! = 11 \cdot 120 = 1320 \ge 1000.$$
Vår approximation blir således:

$$\sum_{k=0}^{4} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{1}{2k+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \frac{1}{216} \qquad \left(= \frac{5651}{7560}\right).$$

Svar: $a_k = \dfrac{(-1)^k}{(2k+1)\,k!}$; $1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{10} - \dfrac{1}{42} + \dfrac{1}{216}$.

7. Notera först att vi kan formulera om vänsterledet i ekvationen enligt

$$D(3y^2y') = 6y(y')^2 + 3y^2y''.$$

Därmed följer det att

$$\begin{aligned} 6y(y')^2 + 3y^2y'' = 60x^4 + 72x^7 \quad &\Leftrightarrow \quad D\left(3y^2y'\right) = 60x^4 + 72x^7 \\ &\Leftrightarrow \quad 3y^2y' = 12x^5 + 9x^8 + C. \end{aligned}$$

Eftersom $y'(0) = 0$ ser vi här att $C = 0$. Denna ekvation är separabel (och redan skriven på den formen), så med ekvivalens har vi att

$$\int 3y^2\,dy = \int \left(12x^5 + 9x^8\right)\,dx \quad \Leftrightarrow \quad y^3 = 2x^6 + x^9 + E.$$

Vi har $y(0) = -1$, så $(-1)^3 = -1 = E$. Lösningen vi söker uppfyller alltså $y^3 = 2x^6 + x^9 - 1$. När kan vi lösa ut y? Eftersom detta kommer involvera $(\,\cdot\,)^{1/3}$ så måste vi undvika att högerledet blir 0 (annars kommer y' inte att existera i vissa punkter). Låt $t = x^3$. Då blir

$$\begin{aligned} 2x^6 + x^9 - 1 = 2t^2 + t^3 - 1 &= (t+1)\left(t^2 + t - 1\right) \\ &= (t+1)\left(\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}\right) \\ &= (t+1)\left(t + \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(t + \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right). \end{aligned}$$

Vi ser alltså att polynomet $2x^6 + x^9 - 1$ har nollställena $x = -\sqrt[3]{\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}}$, $x = -1$ och $x = \sqrt[3]{\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}}$ (och inga andra reella nollställen). Alltså blir definitionsmängden det största öppna intervallet på $\mathbb{R}$ som innehåller $x = 0$ (där vi fått vårt bivillkor) men inte något av nollställena ovan. Alltså får vi intervallet $-1 < x < \sqrt[3]{\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}}$. Vidare ser vi att uttrycket $2x^2 + x^9 - 1$ är -1 i $x = 0$, och således negativ på hela intervallet. Alltså får vi lösningen

$$y(x) = -\sqrt[3]{1 - 2x^6 - x^9}, \quad -1 < x < \sqrt[3]{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}.$$

Svar: $y(x) = -\sqrt[3]{1 - 2x^6 - x^9}, \quad -1 < x < \sqrt[3]{\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}}$.