# Lösningsförslag Envariabelanalys 2, 2021-10-20, 14-19

1. (a) Maclaurinutveckling med restterm av ordning 4 ger

$$\begin{aligned}
2\cos x &= 2\left(1-\frac{1}{2}x^2+\mathcal{O}(x^4)\right) = 2-x^2+\mathcal{O}(x^4)\,,\\
(\sin x)\cdot\ln(1+x) &= \big(x+\mathcal{O}(x^3)\big)\left(x-\frac{1}{2}x^2+\mathcal{O}(x^3)\right) = x^2-\frac{1}{2}x^3+\mathcal{O}(x^4)\,,\\
2\cos x+\sin x\ln(1+x) &= 2-x^2+x^2-\frac{1}{2}x^3+\mathcal{O}(x^4) = 2-\frac{1}{2}x^3+\mathcal{O}(x^4) =\\
&= 2+x^3\underbrace{\left(-\frac{1}{2}+\mathcal{O}(x)\right)}_{<0 \text{ för små } x}.
\end{aligned}$$

Då $x^3$ växlar tecken vid $x=0$ kommer därmed $f(x)<2$ för små $x>0$ och $f(x)>2$ för små $x<0$. Följaktligen har $f$ ej lokalt extremvärde i origo.

(b) Variabelbyte och standardutveckling ger

$$\begin{aligned}
g(x) &= \mathrm{e}^{-2x} = \Big[x=1+t\Big] = \mathrm{e}^{-2-2t} = \mathrm{e}^{-2}\cdot\mathrm{e}^{-2t} =\\
&= \mathrm{e}^{-2}\left(1-2t+\frac{1}{2}(-2t)^2+\mathcal{O}(t^3)\right) = \mathrm{e}^{-2}\left(1-2t+2t^2\right)+\mathcal{O}(t^3) =\\
&= \Big[t=x-1\Big] = \mathrm{e}^{-2}\left(1-2(x-1)+2(x-1)^2\right)+\mathcal{O}\big((x-1)^3\big)
\end{aligned}$$

(c) Maclaurinutveckling till ordning 3 ger

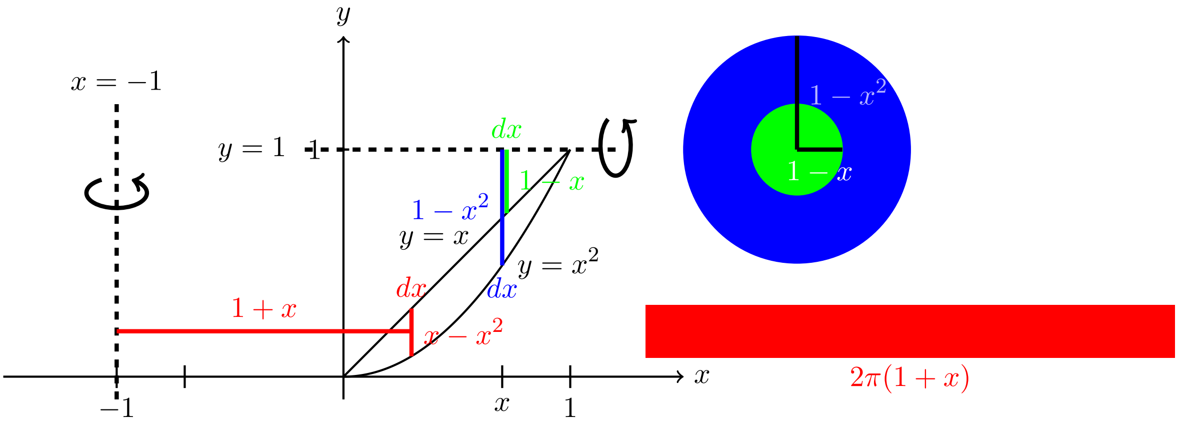
$$\begin{aligned}
\ln(1+\arctan x) &= \ln\left(1+x-\frac{1}{3}x^3+\mathcal{O}(x^5)\right) =\\
&= x-\frac{1}{3}x^3+\mathcal{O}(x^5)-\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{3}x^3+\mathcal{O}(x^5)\right)^2+\\
&\quad+\frac{1}{3}\left(x-\frac{1}{3}x^3+\mathcal{O}(x^5)\right)^3+\mathcal{O}\left(\left(x-\frac{1}{3}x^3+\mathcal{O}(x^5)\right)^4\right) =\\
&= x-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\mathcal{O}\left(x^4\left(1-\frac{1}{3}x^2+\mathcal{O}(x^4)\right)^4\right) =\\
&= x-\frac{1}{2}x^2+\mathcal{O}(x^4)\,,\\
x\sqrt{1-x} &= x\left(1+\binom{1/2}{1}(-x)+\binom{1/2}{2}(-x)^2+\mathcal{O}(x^3)\right) =\\
&= x\left(1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\mathcal{O}(x^3)\right) = x-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^3+\mathcal{O}(x^4)
\end{aligned}$$

så att

$$\begin{aligned}
\frac{\ln(1+\arctan x)-x\sqrt{1-x}}{x^3} &= \frac{x-\frac{1}{2}x^2-\left(x-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^3\right)+\mathcal{O}(x^4)}{x^3} =\\
&= \frac{\frac{1}{8}x^3+\mathcal{O}(x^4)}{x^3} = \frac{1}{8}+\mathcal{O}(x)\to\frac{1}{8}
\end{aligned}$$

då $x\to 0$.

2. Först en tydlig figur över området, $x^2 \leq y \leq x$, $0 \leq x \leq 1$ och det som roterar!




Vi börjar med rotationen kring $y = 1$, d.v.s. $V_2$. Vi kan då se volymselementet $dV_2$ som skillnaden mellan två skivor, den större med radie $1 - x^2$ och den mindre med radie $1 - x$, båda av tjocklek $dx$. Detta ger

$$\begin{aligned} dV_2 &= \pi\left(\left(1-x^2\right)^2 - (1-x)^2\right) dx = \pi\left(1 - 2x^2 + x^4 - \left(1 - 2x + x^2\right)\right) dx = \\ &= \pi\left(2x - 3x^2 + x^4\right) dx, \\ V_2 &= \int dV_2 = \pi \int_0^1 \left(2x - 3x^2 + x^4\right) dx = \pi\left[x^2 - x^3 + \frac{1}{5}x^5\right]_0^1 = \frac{\pi}{5}. \end{aligned}$$

Vid rotationen kring $x = -1$ blir volymselementet $dV_1$ en tunn ring med radie $1 + x$, höjd $x - x^2$ och tjocklek $dx$, d.v.s.

$$\begin{aligned} dV_1 &= 2\pi(1+x)\left(x - x^2\right) dx = 2\pi(1+x)x(1-x)dx = 2\pi x(1-x^2)dx, \\ V_1 &= \int dV_1 = \pi \int_0^1 2x\left(1-x^2\right) dx = \pi\left[-\frac{1}{2}\left(1-x^2\right)^2\right]_0^1 = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

3. Insättning av $x = \pi$ i ekvationen ger

$$y(\pi) + \int_\pi^\pi \frac{y(t)}{t} dt = y(\pi) = \sin\pi = 0.$$

Derivering ger sedan

$$\begin{aligned} y'(x) + \frac{1}{x}y(x) &= \cos x \quad \text{(linjär ekvation av ordning 1)}, \\ I.F. &= e^{\ln x} = x \implies D(xy(x)) = x\cos x \iff \\ \iff xy(x) &= \int x\cos x\, dx = x\sin x - \int \sin x\, dx = x\sin x + \cos x + C \\ \iff y(x) &= \sin x + \frac{\cos x + C}{x}, \\ y(\pi) &= \sin\pi + \frac{\cos\pi + C}{\pi} = \frac{C-1}{\pi} = 0 \iff C = 1 \end{aligned}$$

så att $\quad y(x) = \sin x + \dfrac{1 + \cos x}{x}.$

4. (a) Vi utnyttjar rotkriteriet och standardgränsvärden och får

$$|a_k|^{1/k} = \left|\frac{kx^{4k}}{4^k(k^3+1)}\right|^{1/k} = \frac{k^{1/k}|x|^4}{4(k^3+1)^{1/k}} = \frac{|x|^4}{4} \cdot \frac{k^{1/k}}{\left(k^{1/k}\right)^3 (1 + 1/k^3)^{1/k}} \to \frac{|x|^4}{4}$$

då $k \to \infty$. Enligt rotkriteriet är serien absolutkonvergent om $\quad \dfrac{|x|^4}{4} < 1 \iff |x| < \sqrt{2} \quad$ och $\quad$ divergent om $|x| > \sqrt{2}$.

För $x = \pm\sqrt{2}$ får serien termerna

$$\frac{k}{k^3+1} < \frac{k}{k^3} = \frac{1}{k^2}.$$

Då $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ är konvergent enligt Sats 10.5, sid 442 ($\alpha = 2 > 1$) ger jämförelsesatsen, Sats 10.6, sid 443 att vår potensserie är konvergent för $x = \pm\sqrt{2}$. Följaktligen är den konvergent om $-\sqrt{2} \le x \le \sqrt{2}$ och divergent för övriga $x \in \mathbb{R}$

(b) Då $0 < x < 1$ gäller

$$\int_0^1 \frac{1+x^2}{\sqrt{x}+x^5}dx \le \int_0^1 \frac{1+1}{\sqrt{x}+x^5}dx \le \int_0^1 \frac{2}{\sqrt{x}}dx = \Big[4\sqrt{x}\Big]_0^1 = 4 \qquad \text{V.S.B.}$$

(Integralen är $\approx 2{,}172668199$.)

5. **Alternativ 1:** Vi börjar med att Maclaurinutveckla $\mathrm{e}^{-x^2}$-termen i integranden:

$$\mathrm{e}^{-x^2} = \Big[-x^2 = t\Big] = e^t = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{t^k}{k!} + \frac{\mathrm{e}^{\xi}}{N!}t^N = \Big[t = -x^2\Big] = 1 + \sum_{k=1}^{N-1} \frac{(-1)^k}{k!}x^{2k} + \frac{(-1)^N \mathrm{e}^{\xi}}{N!}x^{2N}$$

för något $\xi$ mellan 0 och $t = -x^2$, d.v.s. $-x^2 \le \xi \le 0$. Integranden blir då

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{e}^{-x^2}-1}{x} &= \frac{1}{x}\left(-1+1+\sum_{k=1}^{N-1}\frac{(-1)^k}{k!}x^{2k} + \frac{(-1)^N\mathrm{e}^{\xi}}{N!}x^{2N}\right) = \\ &= \sum_{k=1}^{N-1}\frac{(-1)^k}{k!}x^{2k-1} + \frac{(-1)^N\mathrm{e}^{\xi}}{N!}x^{2N-1}\end{aligned}$$

för något $\xi : -x^2 \le \xi \le 0$. Detta ger

$$\begin{aligned}\int_0^{1/2} \frac{\mathrm{e}^{-x^2}-1}{x}dx &= \int_0^{1/2}\left(\sum_{k=1}^{N-1}\frac{(-1)^k}{k!}x^{2k-1} + \frac{(-1)^N\mathrm{e}^{\xi}}{N!}x^{2N-1}\right)dx = \\ &= \underbrace{\int_0^{1/2}\sum_{k=1}^{N-1}\frac{(-1)^k}{k!}x^{2k-1}dx}_{=p/q} + \frac{(-1)^N}{N!}\int_0^{1/2}\mathrm{e}^{\xi}x^{2N-1}dx.\end{aligned}$$

Då $\xi \le 0$ är $\mathrm{e}^{\xi} \le 1$ oavsett $x$ så att

$$\begin{aligned}\left|\int_0^{1/2}\frac{\mathrm{e}^{-x^2}-1}{x}dx - \frac{p}{q}\right| &= \left|\frac{(-1)^N}{N!}\int_0^{1/2}\mathrm{e}^{\xi}x^{2N-1}dx\right| = \frac{1}{N!}\int_0^{1/2}\mathrm{e}^{\xi}x^{2N-1}dx \le \\ &\le \frac{1}{N!}\int_0^{1/2}x^{2N-1}dx = \frac{1}{2N{\cdot}N!}\Big[x^{2N}\Big]_0^{1/2} = \frac{1}{2N{\cdot}N!\cdot 2^{2N}} \le \frac{1}{2000} \iff \\ 2N{\cdot}N!\cdot 2^{2N} \ge 2000 &\iff N!N\cdot 4^N \ge 1000.\end{aligned}$$

Prövning med $N = 3$ ger $3!3{\cdot}4^3 = 1152$ så $N = 3$ duger och vi får

$$\frac{p}{q} = \int_0^{1/2}\sum_{k=1}^{3-1}\frac{(-1)^k}{k!}x^{2k-1}dx = \int_0^{1/2}\left(-x+\frac{x^3}{2}\right)dx = \left[-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{8}\right]_0^{1/2} = -\frac{1}{8}+\frac{1}{128} = -\frac{15}{128}.$$

**Alternativ 2:** Vi bestämmer potensserien till integranden och integrerar den (se Sats 10.16, sid 465).

$$\mathrm{e}^{-x^2} = \Big[-x^2 = t\Big] = e^t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} = \Big[t = -x^2\Big] = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} x^{2k},$$

$$\int_0^{1/2} \frac{\mathrm{e}^{-x^2} - 1}{x} dx = \int_0^{1/2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} x^{2k-1} dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \int_0^{1/2} x^{2k-1} dx =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k \cdot k!} \Big[x^{2k}\Big]_0^{1/2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k \cdot k! \cdot 4^k} = \underbrace{\sum_{k=1}^{N-1} \frac{(-1)^k}{2k \cdot k! \cdot 4^k}}_{=p/q} + \underbrace{\sum_{k=N}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k \cdot k! \cdot 4^k}}_{\text{felet}}.$$

Då serien uppenbarligen är konvergent enligt Leibniz kriterium är absolutbeloppet av felet mindre än beloppet av den första termen i "felsumman", d.v.s.

$$|\text{felet}| \leq \left| \frac{(-1)^N}{2N \cdot N! \cdot 4^N} \right| = \frac{1}{2N \cdot N! \cdot 4^N} \leq \frac{1}{2000}$$

vilket ger precis samma resultat som i **Alternativ 1**.

6. Ekvationen är av Euler-typ. Ekvationer av denna typ kan lösas med hjälp av variabelbytet $x = \mathrm{e}^t \iff t = \ln x$. Med detta variabelbyte fås med hjälp av kedjeregeln

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} \frac{dy}{dt},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}\right) = \Big[\text{produktderivering}\Big] = -\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\right)$$

$$= -\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{x}\frac{dy'(t)}{dx} = -\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{x}\frac{dy'(t)}{dt}\frac{dt}{dx} = -\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dt^2}.$$

Insättning i ekvationen ger

$$x^2 y''(x) + 5xy'(x) + 4y(x) = x^2\left(-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dt^2}\right) + 5x\left(\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}\right) + 4y(t) =$$
$$= y''(t) + 4y'(t) + 4y(t) = t$$

vilket är en vanlig andra ordningens ekvation med konstanta koefficienter och som löses med den "vanliga" metoden. Vi får

$$P(r) = r^2 + 4r + 4 = (r+2)^2 = 0 \iff r = -2 \text{ (dubbelrot)} \Longrightarrow y_h(t) = (A + Bt)\mathrm{e}^{-2t},$$

$$y_p = a + bt, \quad y_p' = b, \quad y_p'' = 0 \Longrightarrow 4b + 4a + 4bt = 4(a+b) + 4bt = t \iff b = -a = \frac{1}{4},$$

$$y(t) = y_h + y_p = (A + Bt)\mathrm{e}^{-2t} + \frac{1}{4}(-1 + t) = \Big[t = \ln x\Big] =$$

$$= (A + B\ln x)\mathrm{e}^{-2\ln x} + \frac{1}{4}(-1 + \ln x) = \frac{A + B\ln x}{x^2} + \frac{1}{4}(-1 + \ln x) = y(x).$$

7. Vi börjar med att skriva om $\sin^3$-termen med hjälp av Eulers formler. Vi får

$$\sin^3 x = \left(\frac{\mathrm{e}^{ix} - \mathrm{e}^{-ix}}{2i}\right)^3 = -\frac{1}{8i}\left(\mathrm{e}^{i3x} - 3\mathrm{e}^{ix} + 3\mathrm{e}^{-ix} - \mathrm{e}^{-i3x}\right) =$$

$$= -\frac{1}{4}\left(\frac{\mathrm{e}^{i3x} - \mathrm{e}^{-i3x}}{2i} - 3\frac{\mathrm{e}^{ix} - \mathrm{e}^{-ix}}{2i}\right) = -\frac{1}{4}(\sin 3x - 3\sin x) = \frac{1}{4}(3\sin x - \sin 3x).$$

För att undvika konvergensfrågan startar vi med att studera en delsumma. Med ovanstående omskrivning fås

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{N} 3^k \sin^3 \frac{t}{3^k} &= \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{N} 3^k \left(3\sin\frac{t}{3^k} - \sin\frac{3t}{3^k}\right) = \frac{1}{4}\left(\sum_{k=1}^{N} 3^{k+1}\sin\frac{t}{3^k} - \sum_{k=1}^{N} 3^k \sin\frac{t}{3^{k-1}}\right) = \\
&= \frac{1}{4}\Bigg( \qquad 3^2\sin\frac{t}{3} + 3^3\sin\frac{t}{3^2} + \ldots + 3^N\sin\frac{t}{3^{N-1}} + 3^{N+1}\sin\frac{t}{3^N} - \\
&\quad - \left(3\sin t + 3^2\sin\frac{t}{3} + 3^3\sin\frac{t}{3^2} + \ldots + 3^N\sin\frac{t}{3^{N-1}}\right)\Bigg) = \\
&= \frac{1}{4}\left(3^{N+1}\sin\frac{t}{3^N} - 3\sin t\right) = \frac{3}{4}\left(3^N\sin\frac{t}{3^N} - \sin t\right),
\end{aligned}$$

d.v.s. *om* serien konvergerar och vad den i så fall konvergerar mot hänger på *om* resultatet ovan har gränsvärde då $N \to \infty$. Notera att, för varje fixt $t \in \mathbb{R}$ gäller att $\dfrac{t}{3^N} \to 0$ då $N \to \infty$ så att

$$3^N \sin\frac{t}{3^N} = t\,\frac{\sin\left(t/3^N\right)}{t/3^N} \to t$$

då $N \to \infty$ ($t/3^N \to 0$) för alla $t \in \mathbb{R}$. Härav fås

$$\sum_{k=1}^{\infty} 3^k \sin^3\frac{t}{3^k} = \lim_{N\to\infty}\sum_{k=1}^{N} 3^k\sin^3\frac{t}{3^k} = \frac{3}{4}\lim_{N\to\infty}\left(3^N\sin\frac{t}{3^N} - \sin t\right) = \frac{3}{4}(t - \sin t)$$

för alla $t \in \mathbb{R}$.