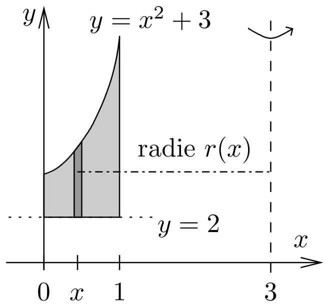
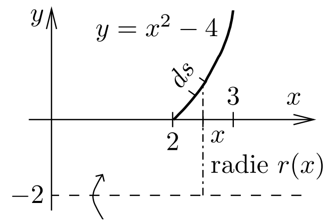
TATA42 Envariabelanalys 2 2022-03-21, lösningsförslag

1. (a) Den mörkare tunna stapeln vid x har höjd $h(x) = (x^2+3) - 2 = x^2+1$ och bredd dx, och när den roterar ett varv kring axeln $x = 3$ genererar den ett tunt rör med radie $r(x) = 3 - x$ och volym $dV(x) = 2\pi r(x)h(x)\,dx$. När hela området roterar genereras därför en kropp med volym



$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 dV(x) = \int_0^1 2\pi(3-x)(x^2+1)\,dx \\ &= 2\pi\Big[3x - \frac{x^2}{2} + x^3 - \frac{x^4}{4}\Big]_0^1 = \frac{13\pi}{2}. \end{aligned}$$

(b) Bågelementet $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + (dy/dx)^2}\,dx = \sqrt{1+4x^2}\,dx = ds(x)$. När detta bågelement vid x roterar ett varv kring axeln $y = -2$ genererar det ett snett cirkulärt band med radie $r(x) = (x^2-4)-(-2) = x^2-2$, kantlängd $ds(x)$ och area $dA(x) = 2\pi r(x)\,ds(x)$. Vi får därför att arean av rotationsytan blir



$$A = \int_2^3 dA(x) = \int_2^3 2\pi(x^2-2)\sqrt{1+4x^2}\,dx.$$

2. (a) Att $\sin t = t - t^3/6 + \mathcal{O}(t^5)$ ger med $t = x^2$ (notera att $x \to 0 \Rightarrow t \to 0$) att nämnaren

$$\sin(x^2) - x^2 + x^6 = x^2 - x^6/6 + \mathcal{O}(x^{10}) - x^2 + x^6 = 5x^6/6 + \mathcal{O}(x^{10}).$$

Vi utvecklar därför täljaren t.o.m. grad 6 i x. Med $t = x^3$ ($x \to 0 \Rightarrow t \to 0$) och utvecklingen $\ln(1+t) = t - t^2/2 + \mathcal{O}(t^3)$ får vi

$$\ln(1+x^3) - x^3 = x^3 - x^6/2 + \mathcal{O}(x^9) - x^3 = -x^6/2 + \mathcal{O}(x^9).$$

Alltså,

$$\frac{\ln(1+x^3)-x^3}{\sin(x^2)-x^2+x^6} = \frac{-x^6/2+\mathcal{O}(x^9)}{5x^6/6+\mathcal{O}(x^{10})} = \frac{-1/2+\mathcal{O}(x^3)}{5/6+\mathcal{O}(x^4)} \to \frac{-1/2+0}{5/6+0} = -\frac{3}{5} \quad \text{då } x \to 0.$$

(b) Nämnaren är x^3, så vi utvecklar täljaren t.o.m. grad 3. Med $t = \arctan x = x - x^3/3 + \mathcal{O}(x^5)$ ($x \to 0 \Rightarrow t \to 0$) och $e^t = 1 + t + t^2/2 + t^3/6 + \mathcal{O}(t^4)$, där successivt $t^2 = x^2 + \mathcal{O}(x^4)$, $t^3 = x^3 + \mathcal{O}(x^5)$ och $\mathcal{O}(t^4) = \mathcal{O}(x^4)$, får vi

$$e^{\arctan x} = 1 + \big(x - \frac{x^3}{3} + \mathcal{O}(x^5)\big) + \frac{x^2+\mathcal{O}(x^4)}{2} + \frac{x^3+\mathcal{O}(x^5)}{6} + \mathcal{O}(x^4) = 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^4)$$

och därmed

$$\frac{e^{\arctan x} - 1 - x - x^2/2}{x^3} = \frac{-x^3/6 + \mathcal{O}(x^4)}{x^3} = -\frac{1}{6} + \mathcal{O}(x) \to -\frac{1}{6} \quad \text{då } x \to 0.$$

(c) Vi utvecklar f så långt att vi ser den ledande variabla termen. Eftersom $\binom{1/2}{2} = -1/8$ får vi, med $t = x^2$, att $\sqrt{1+x^2} = (1+t)^{1/2} = 1 + t/2 - t^2/8 + \mathcal{O}(t^3) = 1 + x^2/2 - x^4/8 + \mathcal{O}(x^6)$, så

$$\begin{aligned} f(x) = \cos x + \sqrt{1+x^2} &= \big(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \mathcal{O}(x^6)\big) + \big(1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + \mathcal{O}(x^6)\big) \\ &= 2 - \frac{x^4}{12} + \mathcal{O}(x^6) = 2 + x^4\Big(-\frac{1}{12} + \mathcal{O}(x^2)\Big). \end{aligned}$$

Eftersom $x^4 > 0$ då $x \neq 0$ och $-1/12 + \mathcal{O}(x^2) < 0$ för x nära 0 följer det att $f(x) < 2 = f(0)$ för $x \neq 0$ nära 0, så f har (strängt) lokalt maximum i $x = 0$.

Svar: (a) $-3/5$ (b) $-1/6$ (c) Lokalt maximum

3. Det karakteristiska polynomet $r^3 + r^2 + 3r - 5 = (r-1)(r^2+2r+5)$ har nollställena $r_1 = 1$ och $r_{2,3} = -1 \pm 2i$, så homogenlösningen blir

$$y_h = A\,e^x + e^{-x}(B\cos 2x + C\sin 2x).$$

Vi söker nu en partikulärlösning $y_p = y_{p1} + y_{p2}$, där y_{p1} tar hand om e^{-x} och y_{p2} tar hand om $x - 5x^2$.

Ansatsen $y_{p1} = a\,e^{-x}$ ger $y_{p1}' = -a\,e^{-x}$, $y_{p1}'' = a\,e^{-x}$ och $y_{p1}''' = -a\,e^{-x}$, varför

$$y_{p1}''' + y_{p1}'' + 3y_{p1}' - 5y_{p1} = (-a + a - 3a - 5a)e^{-x} = -8a\,e^{-x},$$

som blir lika med e^{-x} om $a = -1/8$: alltså duger $y_{p1} = -e^{-x}/8$.

Ansatsen $y_{p2} = ax^2 + bx + c$ ger $y_{p2}' = 2ax + b$, $y_{p2}'' = 2a$ och $y_{p2}''' = 0$, varför

$$\begin{aligned} y_{p2}''' + y_{p2}'' + 3y_{p2}' - 5y_{p2} &= 0 + 2a + 3(2ax+b) - 5(ax^2+bx+c) \\ &= (-5a)x^2 + (6a-5b)x + (2a+3b-5c), \end{aligned}$$

som blir lika med $x - 5x^2$ om $-5a = -5$, $6a - 5b = 1$ och $2a + 3b - 5c = 0$, d.v.s. om $a = 1$, $b = 1$ och $c = 1$; alltså duger $y_{p2} = x^2 + x + 1$.

Således blir den allmänna lösningen

$$y = y_h + y_p = y_h + y_{p1} + y_{p2} = A\,e^x + e^{-x}(B\cos 2x + C\sin 2x) - e^{-x}/8 + x^2 + x + 1.$$

<u>Svar</u>: $y = A\,e^x + e^{-x}(B\cos 2x + C\sin 2x) - e^{-x}/8 + x^2 + x + 1$.

4. (a) Sätt $a_k = x^{2k}/(2^k\sqrt{k+1})$. Eftersom

$$\sqrt[k]{|a_k|} = \frac{|x|^2}{2\,(k+1)^{1/2k}} = \frac{|x|^2}{2}\exp\left(-\frac{\ln(k+1)}{2k}\right) \to \frac{|x|^2}{2} = Q \qquad \text{då } k \to \infty$$

och rotkriteriet medför (absolut)konvergens om $Q < 1$ och divergens om $Q > 1$, d.v.s. om $|x| < \sqrt{2}$ respektive $|x| > \sqrt{2}$, följer att konvergensradien $R = \sqrt{2}$.

<u>Svar</u>: $R = \sqrt{2}$.

(b) Olikheterna

$$0 \le \left|\frac{\cos x}{1+x^2}\right| = \frac{|\cos x|}{1+x^2} \le \frac{1}{1+x^2}, \qquad x > 1,$$

medför att

$$\int_1^\infty \left|\frac{\cos x}{1+x^2}\right| dx \le \int_1^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx = \big[\arctan x\big]_1^\infty = \frac{\pi}{4} < \infty.$$

Enligt jämförelsekriteriet är $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\cos x}{1+x^2}\,dx$ därför absolutkonvergent och därmed konvergent.

<u>Svar</u>: Konvergent.

(c) Vi använder att $\sqrt{x} + x^2$ är större än de båda positiva funktionerna $\sqrt{x}$ och x^2 då $x > 0$, vilket ger

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}+x^2} &= \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}+x^2} + \int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}+x^2} \\ &\le \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} + \int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = \big[2\sqrt{x}\big]_0^1 + \Big[-\frac{1}{x}\Big]_1^\infty = 2 + 1 = 3, \end{aligned}$$

vilket skulle bevisas.

5. Om $y \neq 0$ är

$$y' + e^x y^3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dy/dx}{y^3} = -e^x \quad \Leftrightarrow \quad \int y^{-3} dy = \int (-e^x) dx \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y^{-2}}{-2} = -e^x + C.$$

I (a) är bivillkoret $y(0) = 1$ och i (b) är det $y(0) = -1$. I båda fallen är $y \neq 0$ och $-1/2 = -1 + C$, alltså $C = 1/2$, och därmed

$$y^{-2} = 2\,e^x - 1 \quad \Leftrightarrow \quad y = \pm\frac{1}{\sqrt{2\,e^x - 1}},$$

där $+$ gäller i (a) och $-$ gäller i (b). I båda fallen är det största öppna intervallet där $y(x)$ är en lösning de x för vilka

$$2\,e^x - 1 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x > \ln\frac{1}{2} = -\ln 2,$$

och detta intervall innehåller punkten $x = 0$.

<u>Svar</u>: (a) $y(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\,e^x - 1}}$, $x > -\ln 2$, (b) $y(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{2\,e^x - 1}}$, $x > -\ln 2$.

6. Vi Maclaurinutvecklar $f(t) = \cos t$ med Lagranges restterm. Vi får, eftersom $f'(t) = -\sin t$, $f''(t) = -\cos t$, $f'''(t) = \sin t$, $f^{(4)}(t) = \cos t$ och därmed $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = -1$, $f'''(0) = 0$, $f^{(4)}(\xi) = \cos\xi$, utvecklingen

$$\cos t = f(t) = f(0) + f'(0)t + \frac{f''(0)}{2!}t^2 + \frac{f'''(0)}{3!}t^3 + \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}t^4 = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{\cos\xi}{24}t^4$$

för något $\xi = \xi(t)$ mellan 0 och t. Med $t = x^2$ får vi därför

$$(*) \qquad \cos(x^2) = 1 - \frac{x^4}{2} + \frac{\cos\xi(x)}{24}x^8 \qquad \text{för något } \xi(x) \text{ mellan 0 och } x^2.$$

(Om detta är tillräckligt långt upptäcker vi snart, och i annat fall är det bara att gå tillbaka och utveckla lite längre.)

Om vi integrerar $(*)$ mellan 0 och $1/2$, och lägger till vad $(*)$ ger då $x = 1/2$, får vi, om vi skriver $\eta = \xi(1/2)$ som då ligger mellan 0 och $1/4$,

$$\underbrace{\int_0^{1/2} \cos(x^2)\,dx + \cos\Big(\frac{1}{4}\Big)}_{\text{Exakt värde}} = \int_0^{1/2} \left(1 - \frac{x^4}{2} + \frac{\cos\xi(x)}{24}x^8\right) dx + \left(1 - \frac{(1/2)^4}{2} + \frac{\cos\eta}{24}\Big(\frac{1}{2}\Big)^8\right)$$

$$= \underbrace{\int_0^{1/2} \left(1 - \frac{x^4}{2}\right) dx + 1 - \frac{(1/2)^4}{2}}_{\text{Approximation}} + \underbrace{\int_0^{1/2} \frac{\cos\xi(x)}{24}x^8 dx + \frac{\cos\eta}{24}\Big(\frac{1}{2}\Big)^8}_{\text{Approximationsfel}}.$$

Här är, eftersom $|\cos s| \leq 1$ för alla $s \in \mathbb{R}$,

$$\big|\text{approximationsfelet}\big| \leq \left|\int_0^{1/2} \frac{\cos\xi(x)}{24}x^8 dx\right| + \left|\frac{\cos\eta}{24}\Big(\frac{1}{2}\Big)^8\right| \leq \int_0^{1/2} \frac{|\cos\xi(x)|}{24}x^8 dx + \frac{|\cos\eta|}{24}\Big(\frac{1}{2}\Big)^8$$

$$\leq \int_0^{1/2} \frac{x^8}{24}\,dx + \frac{1}{24}\Big(\frac{1}{2}\Big)^8 \leq \frac{1}{24}\Big(\frac{1}{2}\Big)^8 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{24}\Big(\frac{1}{2}\Big)^8 = \frac{3/2}{24 \cdot 256} \leq \frac{1}{1000},$$

så felet är tillräckligt litet. Tillhörande approximation är

$$\int_0^{1/2} \left(1 - \frac{x^4}{2}\right) dx + 1 - \frac{(1/2)^4}{2} = \left[x - \frac{x^5}{10}\right]_0^{1/2} + 1 - \frac{(1/2)^4}{2} = \frac{160 - 1 + 320 - 10}{320} = \frac{469}{320}.$$

<u>Svar</u>: $q = 469/320$ duger.

7. Maclaurinserien för $\arctan x$ har konvergensradie $R = 1$, och

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}, \qquad |x| < 1,$$

vilket är vad vi ska utgå från. För fixt x, $0 < x < 1$, är denna serie en Leibnizserie: serien är alternerande och beloppet av termerna är lika med $x^{2k+1}/(2k+1)$ som *avtar* mot noll då $k \to \infty$. Uppskattningen för Leibnizserier, $\left|s - \sum_{k=0}^{n} a_k\right| \leq |a_{n+1}|$ där $s = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$, ger därför

$$(*) \qquad \left|\arctan x - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}\right| \leq \frac{x^{2n+3}}{2n+3}, \qquad 0 < x < 1, \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots.$$

Låt nu $x \to 1^-$ i $(*)$ för fixt n. De ingående funktionerna är kontinuerliga och $\arctan 1 = \pi/4$, så

$$\left|\frac{\pi}{4} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}\right| \leq \frac{1}{2n+3}, \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots,$$

och eftersom $1/(2n+3) \to 0$ då $n \to \infty$ får vi

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} \to \frac{\pi}{4} \quad \text{då } n \to \infty, \text{ d.v.s.} \quad 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}.$$

<u>Svar</u>: $\pi/4$.