

SVAR M.M., ENVARIABELANALYS 2, TATA42, 2022-10-19 KL. 14-19

1. Eftersom  $\frac{d}{dx} \ln(1+x^4) = \frac{4x^3}{1+x^4}$  så är  $e^{\ln(1+x^4)} = 1+x^4$  en integrerande faktor till ekvationen. Vi får:

$$(1+x^4) \cdot \left( y' + \frac{4x^3}{1+x^4} y \right) = (1+x^4)y' + 4x^3y = ((1+x^4)y)' = (1+x^4) \cdot 5,$$

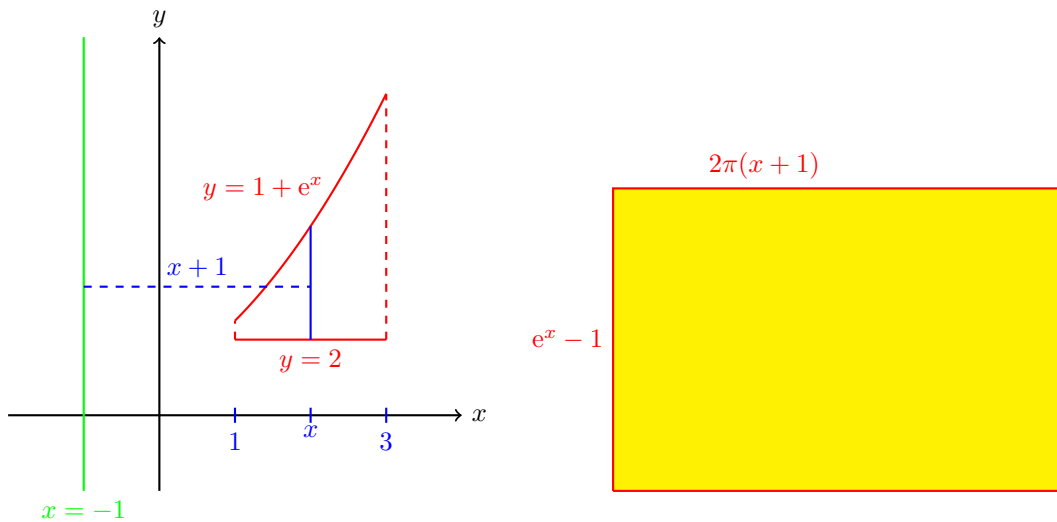
vilket efter integration ger

$$(1+x^4)y = x^5 + 5x + C.$$

Bivillkoret  $y(0) = 2$  ger att  $(1+0^4)y(0) = y(0) = 0^5 + 5 \cdot 0 + C = 2$ , dvs.  $C = 2$ .

$$\text{Svar: } y = \frac{x^5 + 5x + 2}{1+x^4}.$$

2 (a).



När den blå stolpen vid  $x$ , som har höjd  $(1 + e^x) - 2 = e^x - 1$ , roteras kring  $x = -1$  uppstår en cylinder med omkrets  $2\pi(x+1)$  (avståndet mellan  $x$  och linjen är  $x+1$ ) och höjd  $e^x - 1$ , som har area  $2\pi \cdot (x+1) \cdot (e^x - 1) = 2\pi(xe^x + e^x - x - 1)$ . Volymen av rotationskroppen ges av att integrera denna tvärsnittsarea från 1 till 3:

$$\int_1^3 2\pi(xe^x + e^x - x - 1) dx.$$

$$\text{Svar: } \int_1^3 2\pi(xe^x + e^x - x - 1) dx.$$

2 (b.) Eftersom  $x'(t) = 2t$  och  $y'(t) = t^2$  ges kurvlängden av

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt &= \int_0^1 \sqrt{4t^2 + t^4} dt \\ &= \text{/OBS! } t \geq 0/ = \int_0^1 \sqrt{4+t^2} \cdot t dt \\ &= \left/ \begin{array}{l} s = t^2, \\ ds = 2t dt, \\ 0^2 = 0, 1^2 = 1 \end{array} \right/ = \frac{1}{2} \int_0^1 \sqrt{4+s} ds = \frac{1}{2} \left[ \frac{2}{3}(4+s)^{3/2} \right]_0^1 = \frac{5\sqrt{5} - 8}{3}. \end{aligned}$$

$$\text{Svar: } \frac{5\sqrt{5} - 8}{3}.$$

**3 (a).** Då vi har  $x^2$  i nämnaren så räcker det med utveckling till grad 2 och restterm  $\mathcal{O}(x^3)$ . Eftersom  $\sqrt{1+t} = 1 + t/2 - t^2/8 + \mathcal{O}(t^3)$  och  $\arctan(x) = x + \mathcal{O}(x^3)$  får vi med  $t = 2x$  att

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{1+2x} - \arctan(x) - 1}{x^2} &= \frac{\left(1 + \frac{2x}{2} - \frac{(2x)^2}{8} + \mathcal{O}((2x)^3)\right) - (x + \mathcal{O}(x^3)) - 1}{x^2} \\ &= \frac{-\frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^3)}{x^2} = \frac{-\frac{1}{2} + \mathcal{O}(x)}{1} \rightarrow -\frac{1}{2} \text{ då } x \rightarrow 0. \end{aligned}$$

**Svar:**  $-1/2$ .

**3 (b).** Eftersom  $e^t = 1 + t + \mathcal{O}(t^2)$ ,  $\ln(1+x) = x - x^2/2 + \mathcal{O}(x^3)$  och  $\sin(x) = x + \mathcal{O}(x^3)$  får vi med  $t = 2x^2$  att

$$\begin{aligned} \frac{e^{2x^2} - 1}{\ln(1+x) - \sin x} &= \frac{(1 + 2x^2 + \mathcal{O}((2x^2)^2)) - 1}{(x - x^2/2 + \mathcal{O}(x^3)) - (x + \mathcal{O}(x^3))} \\ &= \frac{2x^2 + \mathcal{O}(x^4)}{-x^2/2 + \mathcal{O}(x^3)} = \frac{2 + \mathcal{O}(x^2)}{-1/2 + \mathcal{O}(x)} \rightarrow \frac{2}{-1/2} = -4 \text{ då } t \rightarrow 0. \end{aligned}$$

**Svar:**  $-4$ .

**3 (c).** Eftersom  $\sin(t) = t + \mathcal{O}(t^3)$  och  $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \mathcal{O}(x^6)$  får vi med  $t = x^2$  att

$$\sin(x^2) + 2\cos(x) = (x^2 + \mathcal{O}((x^2)^3)) + 2\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \mathcal{O}(x^6)\right) = 2 + \frac{x^4}{12} + \mathcal{O}(x^6) = 2 + x^4 \left(\frac{1}{12} + \mathcal{O}(x^2)\right),$$

och uttrycket inom parentesen i det sista uttrycket är strängt positivt för  $x$  nära 0 samt  $x^4 > 0$  för  $x \neq 0$  så har vi  $f(x) > f(0) = 2$  för alla  $x \neq 0$  nära noll. Det vill säga  $f(x)$  har ett lokalt (strängt) minimum i  $x = 0$ .

**Svar:** Lokalt minimum i  $x = 0$ .

**4 (a).**

$$\sqrt[k]{\left|\frac{2^k x^k}{k + \sqrt{k}}\right|} = \frac{2|x|}{\sqrt[k]{k + \sqrt{k}}} \rightarrow 2|x| \text{ då } k \rightarrow \infty.$$

Detta ger konvergens då  $2|x| < 1$ , dvs.  $|x| < 1/2$ , och divergens då  $|x| > 1/2$  enligt rotkriteriet.

I ändpunkten  $x = 1/2$  får vi den positiva serien

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k \left(\frac{1}{2}\right)^k}{k + \sqrt{k}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k + \sqrt{k}} \geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k + k} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}.$$

Eftersom den sista serien är divergent följer det av jämförelseprincipen att potensserien divergerar för  $x = 1/2$ .

I ändpunkten  $x = -1/2$  får vi serien

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k \left(\frac{-1}{2}\right)^k}{k + \sqrt{k}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k + \sqrt{k}}.$$

Detta är en alternerande serie där termernas absolutbelopp  $1/(k + \sqrt{k})$  **avtar** mot noll, så serien är konvergent enligt Leibniz kriterium.

**Svar:**  $-1/2 \leq x < 1/2$ .

**4 (b).** Vi ser att integranden är positiv, samt att integralen  $\int_0^1 \frac{1 - \cos x}{x^2 \sqrt{x}} dx$  endast är generaliserad i  $x = 0$ .

$$\frac{1 - \cos x}{x^2 \sqrt{x}} = \frac{1 - (1 - x^2/2 + \mathcal{O}(x^4))}{x^2 \sqrt{x}} = \frac{1/2 + \mathcal{O}(x^2)}{\sqrt{x}}.$$

Vi jämför med  $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$  som är konvergent.

$$\frac{\frac{1 - \cos x}{x^2 \sqrt{x}}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \frac{1/2 + \mathcal{O}(x^2)}{\sqrt{x}} = 1/2 + \mathcal{O}(x^2) \rightarrow 1/2 \text{ då } x \rightarrow 0^+ \quad (0 < 1/2 < \infty),$$

så integralen  $\int_0^1 \frac{1 - \cos x}{x^2 \sqrt{x}} dx$  är konvergent enligt jämförelseprincipen på gränsvärdesform.

Svar: Konvergent.

5.

$$p(D)y = y^{(4)} - 6y''' + 13y'' = 78x - 10 + 36 \cos(2x) + 48 \sin(2x)$$

har karakteristiskt polynom

$$p(r) = r^4 - 6r^3 + 13r^2 = r^2(r^2 - 6r + 13) = r^2((r - 3)^2 + 4) = r^2(r - (3 + 2i))(r - (3 - 2i)).$$

Alltså har vi

$$y_h = C_1 + C_2x + e^{3x}(C_3 \cos(2x) + C_4 \sin(2x)).$$

För att hitta en partikulärlösning  $y_p$  låter vi  $y_p = y_{p_1} + y_{p_2}$  (vilket fungerar då ekvationen är linjär) sådana att

$$p(D)y_{p_1} = 78x - 10 \text{ och } p(D)y_{p_2} = 36 \cos(2x) + 48 \sin(2x).$$

Vi ansätter  $y_{p_1} = ax^3 + bx^2$  (då vi har en dubbelrot i 0):

$$y'_{p_1} = 3ax^2 + 2bx, \quad y''_{p_1} = 6ax + 2b, \quad y'''_{p_1} = 6a, \quad y^{(4)}_{p_1} = 0.$$

Insatt i ekvationen får vi då

$$0 - 6(6a) + 13(6ax + 2b) = 78x - 10,$$

vilket ger  $a = b = 1$ , så  $y_{p_1} = x^3 + x^2$ .

Vi ansätter  $y_{p_2} = a \cos(2x) + b \sin(2x)$ :

$$\begin{aligned} y'_{p_2} &= -2a \sin(2x) + 2b \cos(2x), & y''_{p_2} &= -4a \cos(2x) - 4b \sin(2x) \\ y'''_{p_2} &= 8a \sin(2x) - 8b \cos(2x), & y^{(4)}_{p_2} &= 16a \cos(2x) + 16b \sin(2x). \end{aligned}$$

Insatt i ekvationen får vi då

$$\begin{aligned} 16a \cos(2x) + 16b \sin(2x) - 6(8a \sin(2x) - 8b \cos(2x)) + 13(-4a \cos(2x) - 4b \sin(2x)) \\ = (-36a + 48b) \cos(2x) + (-36b - 48a) \sin(2x) = 36 \cos(2x) + 48 \sin(2x), \end{aligned}$$

vilket ger  $a = -1$  och  $b = 0$ , så  $y_{p_2} = -\cos(2x)$ .

Alltså ges lösningarna av

$$y = y_h + y_{p_1} + y_{p_2} = C_1 + C_2x + e^{3x}(C_3 \cos(2x) + C_4 \sin(2x)) + x^3 + x^2 - \cos(2x).$$

$$\text{Svar: } y = C_1 + C_2x + e^{3x}(C_3 \cos(2x) + C_4 \sin(2x)) + x^3 + x^2 - \cos(2x).$$

6 (a).

$$f(x) = \sqrt[3]{1 + 3x} = (1 + 3x)^{1/3}.$$

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(\xi)}{3!}x^3 \text{ för något } \xi \text{ mellan } 0 \text{ och } x.$$

$f(0) = 1$ ;  $f'(x) = (1 + 3x)^{-2/3}$ ;  $f'(0) = 1$ ;  $f''(x) = -2(1 + 3x)^{-5/3}$ ,  $f''(0) = -2$ ;  $f'''(x) = 10(1 + 3x)^{-8/3}$   
ger nu

$$f(x) = 1 + x - x^2 + \frac{5x^3}{3(1 + 3\xi)^{8/3}} \text{ för något } \xi \text{ mellan } 0 \text{ och } x.$$

$$\text{Svar: } f(x) = 1 + x - x^2 + \frac{5x^3}{3(1 + 3\xi)^{8/3}} \text{ för något } \xi \text{ mellan } 0 \text{ och } x.$$

6 (b). Med  $x = -1/10$  i formeln ovan får vi

$$f(-1/10) = 1 - 1/10 - (1/10)^2 + \frac{5(-1/10)^3}{3(1 + 3\xi)^{8/3}} = \frac{89}{100} - \frac{5}{3000(1 + 3\xi)^{8/3}} \text{ för något } \xi, -1/10 \leq \xi \leq 0.$$

Alltså gäller

$$\begin{aligned} \left| f(-1/10) - \frac{89}{100} \right| &= \left| -\frac{5}{3000(1 + 3\xi)^{8/3}} \right| = \frac{5}{3000(1 + 3\xi)^{8/3}} \\ &\leq \frac{5}{3000(1 - 3/10)^{8/3}} = \frac{5}{3000} \cdot \left(\frac{10}{7}\right)^{8/3} \leq \frac{5}{3000} \cdot \left(\frac{10}{7}\right)^{9/3} = \frac{5}{3 \cdot 7^3} = \frac{5}{1029} < \frac{1}{100}, \end{aligned}$$

där vi använde att  $(1 + 3\xi)^{8/3}$  blir som minst då  $\xi = -1/10$  på intervallet  $[-1/10, 0]$ .

Svar: 89/100.

7. Vi börjar med att notera att eftersom  $e < 3$  får vi  $\ln 3 > 1$ , och  $\ln(\ln(3)) > \ln 1 = 0$ .

Vi noterar att om vi låter  $f(t) = 1/(t(\ln t)(\ln(\ln t))^p)$  så är funktionen positiv och avtagande på  $[3, \infty]$  för  $p \geq 0$ .

Vi har nu

$$\int_3^\infty \frac{1}{t(\ln t)(\ln(\ln t))^p} dt = \int_{u=\ln(\ln 3)}^\infty \frac{1}{u^p} du.$$

Den senare vet vi är konvergent om och endast om  $p > 1$ , så enligt integralkriterier får vi alltså att summan

$$\sum_{k=3}^\infty \frac{1}{k(\ln k)(\ln(\ln k))^p}$$

är konvergent om  $p > 1$  och divergent om  $0 \leq p < 1$ . Men då vi dessutom har att  $p < q$  så gäller att

$$\frac{1}{k(\ln k)(\ln(\ln k))^p} \geq \frac{1}{k(\ln k)(\ln(\ln k))^q},$$

vilket ger divergens även för  $p < 0$ .

(Notera att det inte är sant att  $f(t)$  är avtagande på  $[3, \infty)$  för alla  $p$ , t ex för  $p = -1$  blir  $f'(3)$  positivt.)