Lösningsförslag till tentamen i Envariabelanalys 2, 2024-06-01 kl 08.00–13.00

1. (a) Då nämnaren är av grad 4 räcker det att utveckla täljaren till ordning 4. Vi får

$$\begin{aligned}
\arctan x^2 &= x^2 + \mathcal{O}\Big(\left(x^2\right)^3\Big) = x^2 + \mathcal{O}\big(x^6\big)\,,\\
2\cos x &= 2\left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \mathcal{O}\big(x^6\big)\right) = 2 - x^2 + \frac{1}{12}x^4 + \mathcal{O}\big(x^6\big)\,,\\
2\mathrm{e}^{x^4} &= 2\left(1 + x^4 + \mathcal{O}\Big(\left(x^4\right)^2\Big)\right) = 2 + 2x^4 + \mathcal{O}\big(x^8\big)\,.
\end{aligned}$$

Ovanstående ger

$$\begin{aligned}
\frac{\arctan(x^2) + 2\cos x - 2\,\mathrm{e}^{x^4}}{x^4} &= \frac{x^2 + 2 - x^2 + \frac{1}{12}x^4 - (2 + 2x^4) + \mathcal{O}(x^6)}{x^4} =\\
&= \frac{\left(\frac{1}{12} - 2\right)x^4 + \mathcal{O}(x^6)}{x^4} = -\frac{23}{12} + \mathcal{O}\big(x^2\big) \to -\frac{23}{12}
\end{aligned}$$

då $x \to 0$

(b) Sätt $f(x) = \ln(1+x)$ och derivera fram Maclaurinutvecklingen med restterm på Lagranges form. Vi får

$$\begin{aligned}
&f(x) = \ln(1+x), && f'(x) = \frac{1}{1+x}, && f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}, && f''(x) = \frac{2}{(1+x)^3},\\
&f(0) = 0, && f'(0) = 1, && f''(0) = -1, && f'''(\xi) = \frac{2}{(1+\xi)^3}.
\end{aligned}$$

Maclaurins formel (Sats 8.1, sid 352) med restterm på Lagranges form (Sats 8.5, sid 369) ger då

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3!(1+\xi)^3}x^3 = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3(1+\xi)^3}x^3$$

för något ξ mellan 0 och x. Insättning av $x = -1/10$ ger då

$$\begin{aligned}
\ln\left(1 - \frac{1}{10}\right) = \ln\frac{9}{10} &= \left(-\frac{1}{10}\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{10}\right)^2 + \frac{1}{3(1+\xi)^3}\left(-\frac{1}{10}\right)^3\\
&= -\frac{1}{10} - \frac{1}{200} - \frac{1}{3(1+\xi)^3}\frac{1}{1000} = -\frac{21}{200} - \frac{1}{3(1+\xi)^3}\frac{1}{1000}
\end{aligned}$$

för något ξ mellan 0 och $-1/10$. Detta ger då att

$$\begin{aligned}
\left|\ln\frac{9}{10} - \left(-\frac{21}{200}\right)\right| &= \left|-\frac{1}{3(1+\xi)^3}\frac{1}{1000}\right| \le \frac{1}{3\left(1 - \frac{1}{10}\right)^3}\frac{1}{1000} =\\
&= \frac{1}{3\left(\frac{9}{10}\right)^3}\frac{1}{1000} = \frac{1}{3{\cdot}9^3} = \frac{1}{3{\cdot}81{\cdot}9} = \frac{1}{243{\cdot}9} < \frac{1}{1000},
\end{aligned}$$

d.v.s. $-21/200$ approximerar $\ln(9/10)$ med ett fel vars absolutbelopp är mindre än $1/1000$

2. Vi börjar med lösningen till den homogena ekvationen $y''' - 3y' + 2y = 0$. Denna ger den karakteristiska ekvationen $P(r) = r^3 - 3r + 2 = 0$. Prövning ger $P(1) = 0$. Enligt Faktorsatsen (Sats 1.2, sid 28) är $r - 1$ en faktor. Polynomdivision ger

$$\begin{array}{rrrrrrr|rrr}
 & & r^2 & + & r & - & 2 & & & \\
\hline
r^3 & + & 0r^2 & - & 3r & + & 2 & r & - & 1 \\
\cline{8-10}
r^3 & - & r^2 & & & & & & & \\
\cline{1-3}
 & & r^2 & - & 3r & & & & & \\
 & & r^2 & - & r & & & & & \\
\cline{3-5}
 & & & - & 2r & + & 2 & & & \\
 & & & - & 2r & + & 2 & & & \\
\cline{4-7}
 & & & & & & 0 & & &
\end{array}
\quad \Longrightarrow \quad
\begin{aligned}
P(r) &= r^3 - 3r + 2 = \\
&= (r-1)(r^2 + r - 2) = \\
&= \left[\begin{smallmatrix} r^2+r-2=0 \\ \iff r=1,-2 \end{smallmatrix} \right] = \\
&= (r-1)^2(r+2) = 0 \iff \\
r &= -2, 1(\text{dubbel}).
\end{aligned}$$

Ovanstående ger då att $y_h = (C_0 + C_1 x)\mathrm{e}^x + C_2 \mathrm{e}^{-2x}$.
För att bestämma y_p bestämmer vi y_{p_1}, y_{p_2} så att $P(D)y_{p_1} = 2$ och $P(D)y_{p_2} = \mathrm{e}^x$. Då ekvationen är linjär följer det att $y_{p_1} + y_{p_2} = y_p$ är en partikulärlösning till ekvationen. En snabb titt på ekvationen ger att $y_{p_1} = 1$ duger. Då e^{-x} är en lösning till den homogena ekvationen $(C_0 = 1, C_1 = 0)$ fungerar inte standardansatsen $y_p = C\mathrm{e}^x$. Ansätt istället $y_p = \mathrm{e}^x \cdot z(x)$. Vi får

$$\begin{aligned}
y_p' &= \mathrm{e}^x(z + z'), \\
y_p'' &= \mathrm{e}^x(z + z' + z' + z'') = \mathrm{e}^x(z + 2z' + z''), \\
y_p''' &= \mathrm{e}^x(z + 2z' + z'' + z' + 2z'' + z''') = \mathrm{e}^x(z + 3z' + 3z'' + z''') \Longrightarrow \\
y''' - 3y' + 2y &= \mathrm{e}^x(z + 3z' + 3z'' + z''' - 3(z + z') + 2z) = \\
&= \mathrm{e}^x(z''' + 3z'') = \mathrm{e}^x \iff \\
&\iff z''' + 3z'' = 1.
\end{aligned}$$

Alternativt kan man använda förskjutningsregeln. Om vi utnyttjar att vi kan skriva $P(r) = (r-1)^2(r+2)$ fås med samma ansats att

$$\begin{aligned}
P(D)y_p = P(D)(\mathrm{e}^x z) = \mathrm{e}^x P(D+1)z = \mathrm{e}^x \iff \\
\iff P(D+1)z = ((D+1) - 1)^2((D+1) + 2)z = D^2(D+3)z = \\
= (D^3 + 3D^2)z = z''' + 3z'' = 1.
\end{aligned}$$

Om man i ovanstående ekvation sätter in ett polynom av grad $n \geq 2$ fås som resultat ett polynom av grad $n - 2$. Om vi då vill ha resultatet 1, som är ett polynom av grad 0, måste vi sätta in ett polynom av grad 2, t.e.x. $z = Ax^2 \Longrightarrow z' = 2Ax$. $z'' = 2A$, $z''' = 0$ (några termer av grad 1 eller konstanter behövs ej då dessa redan finns med i y_h och ju dessutom försvinner direkt vid insättning i ekvationen) vilket ger

$$\begin{aligned}
&z''' + 3z'' = 0 + 6A = 1 \iff A = \frac{1}{6} \Longrightarrow z = \frac{1}{6}x^2 \Longrightarrow y_{p_2} = \mathrm{e}^x z = \frac{1}{6}x^2 \mathrm{e}^x, \\
&y_p = y_{p_1} + y_{p_2} = 1 + \frac{1}{6}x^2 \mathrm{e}^x
\end{aligned}$$

Slutligen,

$$y = y_h + y_p = \left(C_0 + C_1 x + \frac{1}{6}x^2 \right) \mathrm{e}^x + C_2 \mathrm{e}^{-2x} + 1.$$

3. (a) För stora värden på k ser vi att

$$a_k = \frac{2k+3}{3k^3-2k^2} \approx \frac{2k}{3k^3} = \frac{2}{3k^2}.$$

Då $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{3k^2} = \frac{2}{3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ är konvergent ($\alpha = 2 > 1$) är vår ***hypotes*** att $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k+3}{3k^3-2k^2}$ är konvergent. För att ***bevisa*** detta kan vi utnyttja Sats 10.6 (Jämförelsesats för positiva serier) och försöka hitta en konvergent positiv serie med större termer att jämföra med:

$$a_k = \frac{2k+3}{3k^3-2k^2} \le \frac{2k+3k}{3k^3-2k^2} \le \frac{5k}{3k^3-2k^3} = \frac{5k}{k^3} = \frac{5}{k^2} = b_k.$$

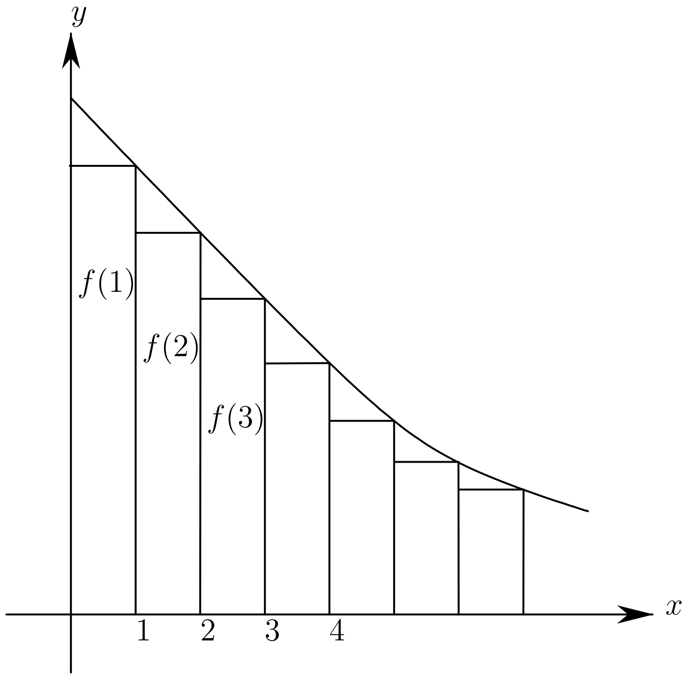
Då $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{5}{k^2}$ är konvergent så är $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k+3}{3k^3-2k^2}$ konvergent enligt jämförelsesatsen.

Det går utmärkt att använda jämförelse på gränsvärdesform (Sats 10.7) istället:

$$a_k = \frac{2k+3}{3k^3-2k^2} = \frac{k}{k^3}\,\frac{2+\frac{3}{k}}{3-\frac{2}{k}} = \underbrace{\frac{1}{k^2}}_{b_k}\,\underbrace{\frac{2+\frac{3}{k}}{3-\frac{2}{k}}}_{c_k}.$$

Då $c_k \to 2/3 > 0$ då $k \to \infty$ och då $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ är konvergent så ger Sats 10.7 att $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k+3}{3k^3-2k^2}$ är konvergent.

(b) Vi skall visa uppskattningen genom att uppskatta seriens summa med en integral. Låt $f(k) = \frac{1}{1+k^2}$ och betrakta nedanstående figur.



Ur denna följer omedelbart att

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+k^2} \leq \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \Big[\arctan x\Big]_0^{\infty} = \frac{\pi}{2}$$

så att

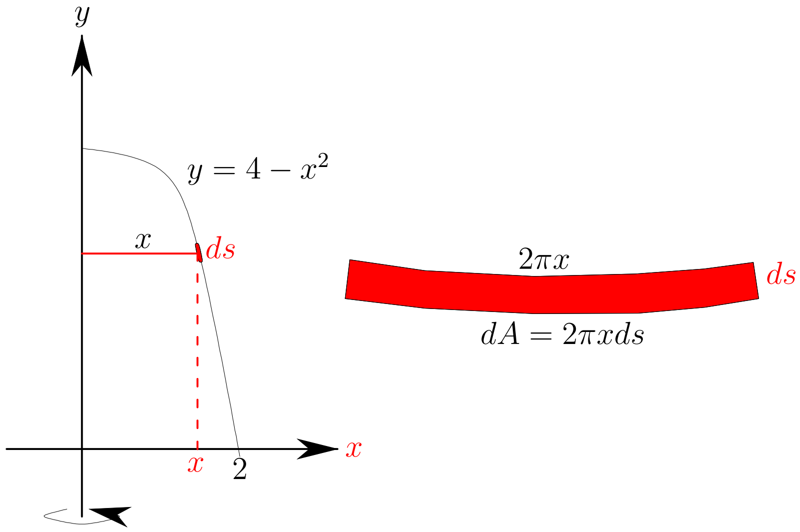
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{1+k^2} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+k^2} \leq 1 + \frac{\pi}{2} \leq 3.$$

(c) Integralen är endast generaliserad i ∞ och då integranden växlar tecken undersöker vi om integralen är absolutkonvergent.

$$\int_0^{\infty} \left| \frac{\cos x}{x+\mathrm{e}^x} \right| dx = \int_0^{\infty} \frac{|\cos x|}{x+\mathrm{e}^x}\, dx \leq \int_0^{\infty} \frac{1}{x+\mathrm{e}^x}\, dx \leq \int_0^{\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^x}\, dx = $$
$$= \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-x}\, dx = \Big[-\mathrm{e}^{-x}\Big]_0^{\infty} = 1$$

så integralen är absolutkonvergent och därmed konvergent enligt Sats 10.14

4. (a) Vi börjar med det viktigaste, FIGUREN!



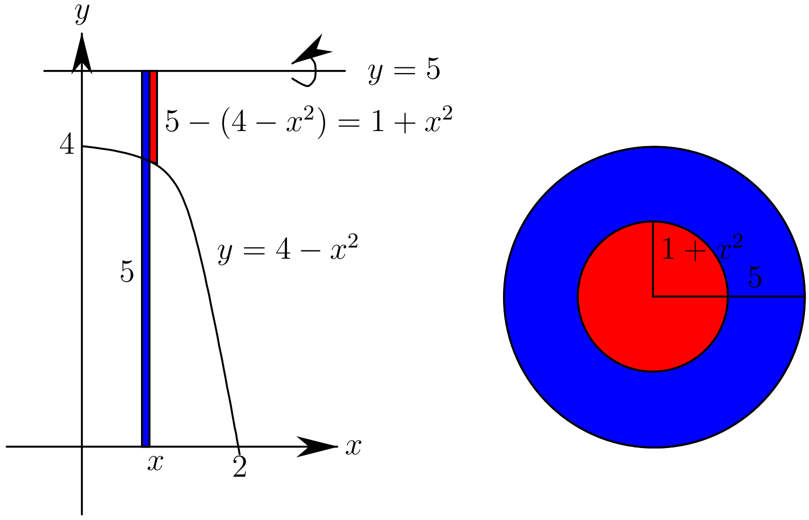
Med $y = 4 - x^2$ fås ur ovanstående figur att

$$ds = \sqrt{1+(y')^2}dx = \sqrt{1+4x^2}dx, \quad dA = 2\pi l ds = 2\pi x\sqrt{1+4x^2}dx,$$

$$A = \int dA = 2\pi \int_0^2 x\sqrt{1+4x^2}\, dx = \begin{bmatrix} {\scriptstyle t=1+4x^2} \\ {\scriptstyle dt=8xdx} \\ {\scriptstyle xdx=dt/8} \end{bmatrix} = \frac{2\pi}{8} \int_1^{17} \sqrt{t}\, dt =$$

$$= \frac{\pi}{4}\left[\frac{2}{3}t^{3/2}\right]_1^{17} = \frac{\pi}{6}\left(17^{3/2} - 1\right).$$

(b) Vi börjar med det viktigaste, FIGUREN!



Ur detta ser vi att

$$dV = dV_1 - dV_2 = \pi \left(5^2 - \left(1 + x^2\right)^2\right) dx = \pi \left(24 - 2x^2 - x^4\right) dx$$

$$V = \int dV = \pi \int_0^2 \left(24 - 2x^2 - x^4\right) dx.$$

5. Antag $y = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ löser ekvationen och att serien är konvergent då $|x| < R$ för något $R > 0$. Då är $y(0) = c_0 = 1$ och $y'(0) = c_1 = 0$. Vidare, enligt Sats 10.16, sid 465 är serien då deriverbar och dess derivata fås genom att derivera term för term. Detta ger

$$y' = D\left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k\right) = D\left(c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k x^k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k D\left(x^k\right) = x \sum_{k=1}^{\infty} c_k k x^{k-1},$$

$$xy' = x \sum_{k=1}^{\infty} c_k k x^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k k x^k,$$

$$y'' = Dy' = D\left(\sum_{k=1}^{\infty} c_k k x^{k-1}\right) = D\left(c_1 + \sum_{k=2}^{\infty} c_k k x^{k-1}\right) = \sum_{k=2}^{\infty} c_k k D\left(x^{k-1}\right) =$$

$$= \sum_{k=2}^{\infty} c_k k(k-1) x^{k-2} = \begin{bmatrix} m = k-2 \\ k = m+2 \end{bmatrix} = \sum_{m=0}^{\infty} c_{m+2}(m+2)(m+1) x^m.$$

Insättning i ekvationen ger (byt tillbaka från m till k som summationsindex i y'')

$$y'' - xy' - y = \sum_{k=0}^{\infty} c_{k+2}(k+2)(k+1) x^k - \sum_{k=1}^{\infty} c_k k x^k - \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k =$$

$$= 2c_2 - c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[c_{k+2}(k+2)(k+1) - c_k k - c_k\right] x^k =$$

$$= 2c_2 - c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (k+1)\left[c_{k+2}(k+2) - c_k\right] x^k = 0 = \sum_{k=0}^{\infty} 0 \cdot x^k.$$

Entydigheten hos maclaurinutvecklingar ger då att

$$2c_2 - c_0 = 0 \iff c_2 = \frac{1}{2}c_0 = \frac{1}{2},$$
$$c_{k+2}(k+2) - c_k = 0 \iff c_{k+2} = \frac{1}{k+2}c_k,\ k \geq 1.$$

Vi fortsätter med att beräkna de efterfrågade nollskilda koefficienterna.

$$\underline{\underline{k=1}} : c_3 = \frac{1+2}{c_{\ 1}} = \frac{1}{3}\cdot 0 = 0 \qquad \underline{\underline{k=2}} : c_4 = \frac{1}{2+2}c_2 = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$
$$\underline{\underline{k=3}} : c_5 = \frac{3+2}{c_{\ 3}} = \frac{1}{5}\cdot 0 = 0 \qquad \underline{\underline{k=4}} : c_6 = \frac{1}{4+2}c_2 = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{8} = \frac{1}{48}.$$

Ur ovanstående inses att alla koefficienter med udda index, $c_{2k-1} = 0$ för $k \geq 1$ och att koefficienterna med jämnt index, $c_{2k} \neq 0$ för $k \geq 0$, dvs

$$y = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{48}x^6 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k}x^{2k}.$$

Då vi nu har beräknat de fyra första nollskilda koefficienterna återstår endast att beräkna seriens konvergensradie. Sätt $a_k = c_{2k}x^{2k}$ och använd kvotkriteriet (Sats 10.9 (b), sid 450). Från rekursionsformeln ovan fås då att

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \left|\frac{c_{2(k+1)}x^{2(k+1)}}{c_{2k}x^{2k}}\right| = \frac{c_{2k+2}}{c_{2k}}\left|x^2\right| = \frac{1}{2k+2}x^2 \to 0 = Q$$

då $k \to \infty$. Då $Q < 1$ för alla $x \in \mathbb{R}$ ger kvotkriteriet (Sats 10.9 (b), sid 450) att potensserien är absolutkonvergent för alla $x \in \mathbb{R}$ vilket då rättfärdigar vår inledande ansats.

Anmärkning: Tittar man lite noggrannare på koefficienterna ser man

$$y = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{48}x^6 + \ldots = 1 + \left(\frac{x^2}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{x^2}{2}\right)^3 + \ldots =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{x^2}{2}\right)^k = \mathrm{e}^{x^2/2}.$$

För att bevisa detta påstående noterar vi att med $y = \mathrm{e}^{x^2/2}$ är $y(0) = 1$ och

$$y' = x\mathrm{e}^{x^2/2}, \quad y'(0) = 0, \quad y'' = \mathrm{e}^{x^2/2}\left(1 + x^2\right),$$
$$y'' - xy' - y = \mathrm{e}^{x^2/2}\left(1 + x^2 - x^2 - 1\right) = 0$$

vilket visar att $y = \mathrm{e}^{x^2/2}$ är lösningen till ekvationen.

6. Multiplicera upp nämnaren i högerledet och förenkla. Då fås

$$\mathrm{e}^{-x}\left(1 + cx + dx^2\right) = 1 + ax + bx^2 + \left(1 + cx + dx^2\right)\mathcal{O}\left(x^5\right) = 1 + ax + bx^2 + \mathcal{O}\left(x^5\right).$$

Då högerledet ser ut som en Maclaurinutveckling av ordning 4 (med restterm av ordning 5) följer det att om vi kan bestämma a, b, c, d så att detta överensstämmer med Maclaurinutecklingen av vänsterledet till ordning 4 så är problemet löst. Bestäm Maclaurinutvecklingen av vänsterledet.

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{-x}\left(1+cx+dx^2\right) &= \left(1-x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{24}x^4+\mathcal{O}\big(x^5\big)\right)\left(1+cx+dx^2\right) = \\
&= \left(1+cx+dx^2\right)-\left(x+cx^2+dx^3\right)+\frac{1}{2}\left(x^2+cx^3+dx^4\right)- \\
&\quad -\frac{1}{6}\left(x^3+cx^4\right)+\frac{1}{24}x^4+\mathcal{O}\big(x^5\big) = \\
&= 1+x(c-1)+x^2\left(d-c+\frac{1}{2}\right)+x^3\left(-d+\frac{1}{2}c-\frac{1}{6}\right)+ \\
&\quad +x^4\left(\frac{1}{2}d-\frac{1}{6}c+\frac{1}{24}\right)+\mathcal{O}\big(x^5\big) = 1+ax+bx^2+\mathcal{O}\big(x^5\big)\,.
\end{aligned}$$

Entydighetsssatsen för Maclaurinpolynom (Sats 8.4, sid 368) ger då att om detta skall vara möjligt så måste det gå att välja a, b, c, d så att

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
x & : & a & = & c & & & - & 1 \\
x^2 & : & b & = & -c & + & d & + & \frac{1}{2} \\
x^3 & : & 0 & = & \frac{1}{2}c & - & d & - & \frac{1}{6} \\
x^4 & : & 0 & = & -\frac{1}{6}c & + & \frac{1}{2}d & + & \frac{1}{24}
\end{array}\,.$$

Ur ekvationerna som fås från x^3- och x^4-koefficienterna bestämmer vi c och d.

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} c & - & 2d & = & \frac{1}{3} \\ c & - & 3d & = & \frac{1}{4} \end{array}\right. \overset{r_2-r_1}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcr} c & - & 2d & = & \frac{1}{3} \\ & & -d & = & -\frac{1}{12} \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcr} c & = & \frac{1}{3}+\frac{2}{12}=\frac{1}{2} \\ d & = & \frac{1}{12} \end{array}\right.\,.$$

Insatt i de resterande ekvationerna fås

$$\begin{aligned}
a &= c-1=\tfrac{1}{2}-1=-\tfrac{1}{2} \\
b &= -c+d+\tfrac{1}{2}=-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{12}+\tfrac{1}{2}=\tfrac{1}{12}
\end{aligned}$$

och vi har visat att

$$\mathrm{e}^{-x}=\frac{1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{12}x^2}{1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{12}x^2}+\mathcal{O}\big(x^5\big)\,,$$

d.v.s. $a=-\frac{1}{2}$, $b=d=\frac{1}{12}$, $c=\frac{1}{2}$.