Lösningsförslag till tentamen i Envariabelanalys 2, 2024-08-29 kl 08.00–13.00

1. (a) Maclaurinutveckling av täljare $T(x)$ och nämnare $N(x)$ var för sig ger

$$N(x) = \arctan x - x = x - \frac{1}{3}x^3 + \mathcal{O}(x^5) - x = -\frac{1}{3}x^3 + \mathcal{O}(x^5)\,,$$
$$T(x) = x - \sin x = x - \left(x - \frac{1}{6}x^3 + \mathcal{O}(x^5)\right) = \frac{1}{6}x^3 + \mathcal{O}(x^5)\,,$$
$$\frac{T(x)}{N(x)} = \frac{\frac{1}{6}x^3 + \mathcal{O}(x^5)}{-\frac{1}{3}x^3 + \mathcal{O}(x^5)} = \frac{\frac{1}{6} + \mathcal{O}(x^2)}{-\frac{1}{3} + \mathcal{O}(x^2)} \to \frac{\frac{1}{6}}{-\frac{1}{3}} = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}$$

då $x \to 0$.
Svar: $\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{\arctan x - x} = -\frac{1}{2}$

(b) Maclaurinutveckling ger

$$\begin{aligned}
f(x) &= 6e^x - 3\ln(1+x^2) - 6x - x^3 = \\
&= 6\left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \mathcal{O}(x^5)\right) - \\
&\qquad - 3\left(x^2 - \frac{1}{2}x^4 + \mathcal{O}(x^6)\right) - 6x - x^3 = \\
&= 6 + 6x + 3x^2 + x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \mathcal{O}(x^5) - 3x^2 + \frac{3}{2}x^4 + \mathcal{O}(x^6) - 6x - x^3 = \\
&= 6 + \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{2}\right)x^4 + \mathcal{O}(x^5) + \mathcal{O}(x^6) = 6 + \frac{7}{4}x^4 + \mathcal{O}(x^5) = \\
&= 6 + \underset{\geq 0}{x^4}\underbrace{\left(\frac{7}{4} + \mathcal{O}(x)\right)}_{>0 \text{ om } x \text{ litet}} > 6
\end{aligned}$$

om $x \neq 0$ och litet. Följaktligen har vi ett lokalt minimum, 6 för $x = 0$.
Svar: $f(x) = 6\,e^x - 3\ln(1+x^2) - 6x - x^3$ har lokalt minimum i $x = 0$.

(c) Sätt $t = 1/x$ så att $t = 1/x \to 0^+$ då $x \to \infty$. Byte till den nya variabeln t och därefter Maclaurinutveckling ger

$$\begin{aligned}
x^2\cos\frac{1}{x} - \sqrt{x^4 + x^2} &= \frac{1}{t^2}\cos t - \sqrt{\frac{1}{t^4} + \frac{1}{t^2}} = \frac{\cos t - \sqrt{1+t^2}}{t^2} = \\
&= \frac{1 - \frac{1}{2}t^2 + \mathcal{O}(t^4) - \left(1 + \frac{1}{2}t^2 + \mathcal{O}(t^4)\right)}{t^2} = \\
&= \frac{-t^2 + \mathcal{O}(t^4)}{t^2} = -1 + \mathcal{O}(t^2) \to -1
\end{aligned}$$

eftersom $t = \frac{1}{x} \to 0^+$ då $x \to \infty$.
Svar: $\lim_{x\to\infty}\left(x^2\cos\frac{1}{x} - \sqrt{x^4 + x^2}\right) = -1$

2. (a) Koefficienten framför y är $f(x) = \frac{-2x}{1+x^2}$ vilken har en primitiv funktion $F(x) = -\ln(1+x^2)$ så att den integrerande faktorn blir

$$I.F. = e^{-\ln(1+x^2)} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Multiplikation av ekvationen med integrerande faktorn ger då att ekvationen kan skrivas

$$D\left(\frac{1}{1+x^2}y\right) = \frac{1}{1+x^2}$$

och integration av båda leden ger

$$\frac{1}{1+x^2}y = \arctan x + C \iff y = (1+x^2)(\arctan x + C).$$

Begynnelsevillkoret $y(1) = 0$ ger sedan

$$y(1) = 0 = (1+1)(\arctan 1 + C) \iff C = -\arctan 1 = -\frac{\pi}{4}$$

så att $y = (1+x^2)(\arctan x - \frac{\pi}{4})$.

(b) Vi börjar med det inbyggda begynnelsevärdet som fås genom insättning av $x = 2$.

$$y(2) = \int_2^2 \big(y(t)\big)^2 dt + 1 = 1$$

eftersom intergralen är 0 för $x = 2$. Derivering ger enligt analysens huvudsats att

$$y'(x) = y(x)^2 \iff \begin{cases} \dfrac{y'(x)}{y(x)^2} = 1, \ y \neq 0 \\ \quad \text{eller} \\ y \equiv 0 \end{cases} .$$

Eftersom $y(2) = 1$ faller alternativet $y \equiv 0$ bort. Vi får

$$\frac{y'}{y^2} = 1 \iff \int \frac{dy}{y^2} = \int dx \iff -\frac{1}{y} = x + C$$

och insättning av begynnelsevillkoret ger

$$-\frac{1}{y(2)} = -1 = 2 + C \iff C = -3$$

så att

$$-\frac{1}{y} = x - 3 \iff y = \frac{1}{3-x}, \ x \neq 3.$$

Då lösningen måste vara definierad för $x = 2$ följer att det största öppna intervall där lösningen är definierad blir $x < 3$.

Svar: (a) $y = (1+x^2)(\arctan x - \frac{\pi}{4})$, (b) $y = \frac{1}{3-x}$, $x < 3$

3. (a) Låt $a_k = \frac{k^2x^{2k}}{2^k+k^2}$ och använd rot- eller kvotkriteriet. Här demonstrerar vi kvotkriteriet

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \left|\frac{(k+1)^2x^{2k+2}}{2^{k+1}+(k+1)^2} \cdot \frac{2^k+k^2}{k^2x^{2k}}\right| = |x|^2\left(\frac{k+1}{k}\right)^2 \frac{2^k+k^2}{2^{k+1}+(k+1)^2} =$$

$$= |x|^2\left(1+\frac{1}{k}\right)^2 \frac{1+2^{-k}k^2}{2+2^{-k}(k+1)^2} \to \frac{|x|^2}{2} = Q$$

då $k \to \infty$ enligt kända standardgränsvärden. Enligt kvotkriteriet (Sats 10.9, sid 450) är serien absolutkonvergent om

$$Q = \frac{|x|^2}{2} < 1 \iff |x| < \sqrt{2}$$

och divergent om $Q > 1$, d.v.s. $R = \sqrt{2}$.

(b) På integrationsintervallet, $]e, \infty[$ gäller

$$1 = \ln e \leq \ln x \quad \text{och} \quad 0 < \arctan x < \pi/2 \iff 1/\arctan x > 2/\pi$$

eftersom både $\ln x$ och $\arctan x$ är strängt växande. Detta ger

$$f(x) = \frac{\ln x}{x \arctan x} \geq \frac{1}{x \arctan x} \geq \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{x} = g(x)$$

Då $\int_e^\infty g(x)\,dx$ är känt divergent ($\alpha = 1$ i Sats 10.12(a), sid 456, att undre gränsen är e och inte 1 spelar ingen roll). Den givna integralen är alltså divergent enligt Sats 10.11(b) (Jämförelsesats I för generaliserade integraler), sid 456

(c) Enligt Sats 10.10 (Leibniz kriterium för alternerande serier), sid 451 gäller att |felet| då serien approximeras med en delsumma är mindre än beloppet av den första utelämnade termen, d.v.s.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^3} = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k^3}}_{\text{approximation}} + \underbrace{\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^3}}_{\text{felet}}$$

ger

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^3} \right| \leq \left| \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^3} \right| = \frac{1}{(n+1)^3} \leq \frac{1}{1000} = \frac{1}{10^3}$$

och vi ser att det duger med $n + 1 = 10 \iff n = 9$.

Svar: (a) $R = \sqrt{2}$, (b) Integralen är divergent, (c) $n = 9$

4. (a) Det är tillåtet att komma ihåg formeln för bågelementet ds i polära koordinater utantill. Med $r(\varphi) = \cos\varphi$ fås

$$ds = \sqrt{(r'(\varphi))^2 + (r(\varphi))^2} d\varphi = \sqrt{\sin^2\varphi + \cos^2\varphi}\, d\varphi = d\varphi.$$

Om man inte kommer ihåg formeln utantill kan man härleda den direkt genom insättning av polära koordinater i den ursprungliga formen för bågelementet

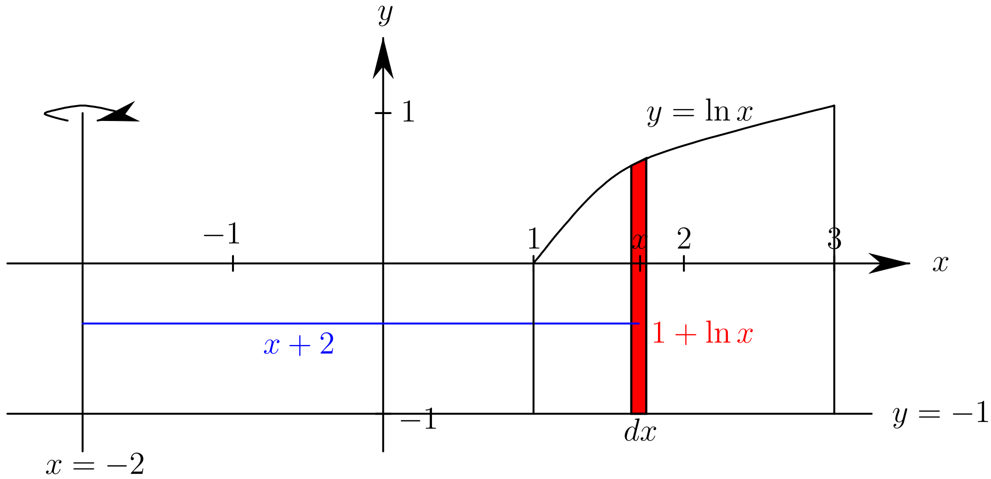
$$\begin{cases} x &= r(\varphi)\cos\varphi = \cos^2\varphi = \frac{1+\cos 2\varphi}{2} \\ y &= r(\varphi)\sin\varphi = \cos\varphi\sin\varphi = \frac{1}{2}\sin 2\varphi \end{cases} \implies$$

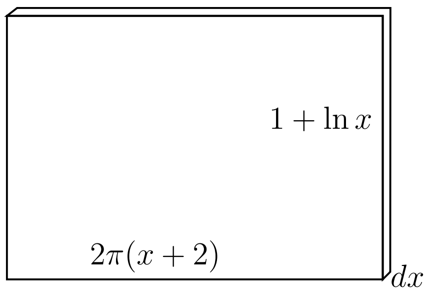
$$\implies ds = \sqrt{(x'(\varphi))^2 + (y'(\varphi))^2}\, d\varphi = \sqrt{(-\sin 2\varphi)^2 + (\cos 2\varphi)^2}\, d\varphi = d\varphi.$$

Detta ger att kurvlängden L fås som

$$L = \int ds = \int_0^{\pi/4} d\varphi = \frac{\pi}{4}.$$

(b) Vi styckar upp området så att vi kan använda rörformeln och börjar med det viktiga, FIGUREN!





Ur denna får vi

$$
\begin{aligned}
dV &= 2\pi(x+2)(1+\ln x)dx,\\
V &= \int dV = 2\pi\int_1^3 (x+2)(1+\ln x)\,dx \overset{P.I.}{=}\\
&= \pi\left(\Big[(x+2)^2(1+\ln x)\Big]_1^3 - \int_1^3 \frac{x^2+4x+4}{x}\,dx\right) =\\
&= \pi(25(1+\ln 3)-9) - \pi\int_1^3\left(x+4+\frac{4}{x}\right)dx =\\
&= \pi(16+25\ln 3) - \pi\left[\frac{x^2}{2}+4x+4\ln x\right]_1^3 =\\
&= \pi(16+25\ln 3) - \pi\left(\frac{9}{2}+12+4\ln 3-\frac{1}{2}-4\right) =\\
&= \pi(16+25\ln 3) - \pi\,(12+4\ln 3) = \pi(4+21\ln 3)
\end{aligned}
$$

Svar: (a) $L = \frac{\pi}{4}$, (b) $V = \pi(4 + 21\ln 3)$

5. Vi börjar med att ta fram Maclaurinutvecklingen av e^{-t^2} med restterm på Lagrange(liknande) form genom att utnyttja Maclaurinutvecklingen av e^s med restterm på Lagranges form. Då fås

$$\begin{aligned} e^{-t^2} &= \left[-t^2 = s\right] = e^s = 1 + s + \frac{1}{2}s^2 + \ldots + \frac{1}{n!}s^n + \frac{e^{\xi}}{(n+1)!}s^{n+1} = \\ &= \left[s = -t^2\right] 1 - t^2 + \frac{1}{2}t^4 + \ldots + \frac{(-1)^n}{n!}t^{2n} + \frac{(-1)^{n+1}e^{\xi}}{(n+1)!}t^{2n+2} \end{aligned}$$

för något ξ mellan 0 och $s = -t^2 \leq 0$. Vi vet nu tecknet på ξ och kan därmed skriva $-t^2 \leq \xi \leq 0$. (*)
Tycker man det känns svårt att hantera ett allmänt n kan man chansa och utveckla till fixt gradtal, t.ex. grad 4 med restterm av ordning 6. Skulle det visa sig att detta inte duger är det inget stort jobb att utöka med en term. Skulle resultatet verka onödigt bra är det ju inte fel och man har skrivit några termer extra och troligen fått lite besvärligare siffror i feluppskattningen.
Vi fortsätter här med n som bestäms på slutet.

$$\begin{aligned} \int_0^x e^{-t^2}\,dt &= \int_0^x \left(1 - t^2 + \frac{1}{2}t^4 + \ldots + \frac{(-1)^n}{n!}t^{2n} + \frac{(-1)^{n+1}e^{\xi(t)}}{(n+1)!}t^{2n+2}\right) dt = \\ &= \int_0^x \left(1 - t^2 + \frac{1}{2}t^4 + \ldots + \frac{(-1)^n}{n!}t^{2n}\right) dt + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}\int_0^x e^{\xi(t)}t^{2n+2}dt = \\ &= \left[t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{10}t^5 + \ldots + \frac{(-1)^n}{n!(2n+1)}t^{2n+1}\right]_0^x + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}\int_0^x e^{\xi(t)}t^{2n+2}dt = \\ &= \underbrace{x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{10}x^5 + \ldots + \frac{(-1)^n}{n!(2n+1)}x^{2n+1}}_{p(x)=\text{approximationen}} + \underbrace{\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}\int_0^x e^{\xi(t)}t^{2n+2}dt}_{\text{felet}}. \end{aligned}$$

Då $\xi(t) \leq 0$ för alla t på integrationsintervallet enligt (*) ovan följer det att $e^{\xi(t)} \leq 1$ på integrationsintervallet. Med $p(x)$ enligt ovan fås då $0 \leq x \leq 1/2$ att

$$\begin{aligned} \left|\int_0^x e^{-t^2}\,dt - p(x)\right| &= \left|\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}\int_0^x e^{\xi(t)}t^{2n+2}dt\right| \leq \frac{1}{(n+1)!}\int_0^x t^{2n+2}dt = \\ &= \frac{1}{(n+1)!(2n+3)}\left[t^{2n+3}\right]_0^x = \frac{1}{(n+1)!(2n+3)}x^{2n+3} \leq \\ &\leq \frac{1}{(n+1)!(2n+3)2^{2n+3}}. \end{aligned} \tag{1}$$

Återstår att bestämma ett n som duger. Hur? Prova!

$$\underline{\underline{n=1}}: \quad \frac{1}{(1+1)!(2\cdot1+3)2^{2\cdot1+3}} = \frac{1}{2\cdot5\cdot2^5} = \frac{1}{320} \quad \text{Duger ej}$$

$$\underline{\underline{n=2}}: \quad \frac{1}{(2+1)!(2\cdot2+3)2^{2\cdot2+3}} = \frac{1}{6\cdot7\cdot2^7} = \frac{1}{42\cdot128} \leq \frac{1}{40\cdot125} = \frac{1}{5000} \quad \text{Duger!}$$

Insättning av $n = 2$ i den allmänna termen i $p(x)$ ovan ger att högstagradstermen i $p(x)$ blir x^5. Följaktligen duger

$$p(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{10}x^5$$

som approximation av integralen för alla x: $0 \leq x \leq 1/2$.
Alternativ: Uppgiften kan även lösas genom att utnyttja beräkna potensserien för e^{-t^2} och sen integrerara denna i enlighet med Sats 10.16, sid. 465 enligt följande:

$$\mathrm{e}^{-t^2} = \left[-t^2 = s\right] = \mathrm{e}^s = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} s^k = \left[s = -t^2\right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} t^{2k},$$

$$\begin{aligned}\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2} dt &= \int_0^x \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} t^{2k}\right) dt \overset{\text{Sats10.16}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \int_0^x t^{2k}\, dt = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \left[\frac{1}{2k+1} t^{2k+1}\right]_0^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(2k+1)} x^{2k+1} = \\ &= \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!(2k+1)} x^{2k+1}}_{=p(x)} + \underbrace{\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(2k+1)} x^{2k+1}}_{\text{felet}}.\end{aligned}$$

Vi får då

$$\begin{aligned}\left|\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2} dt - p(x)\right| &= \left|\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(2k+1)} x^{2k+1} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!(2k+1)} x^{2k+1}\right| = \\ &= \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(2k+1)} x^{2k+1}\right|.\end{aligned}$$

Då serien=felet kommer vara konvergent enligt Leibniz kriterium då $0 \leq x \leq 1/2$ kan vi utnyttja feluppskattningen som man får på köpet i Leibniz kriterium (som i uppgift 3 (c)) och som då ger

$$\begin{aligned}|\text{felet}| &= \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(2k+1)} x^{2k+1}\right| \leq \left|\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!(2n+3)} x^{2n+3}\right| = \frac{|x|^{2n+3}}{(n+1)!(2n+3)} \leq \\ &\leq \frac{1}{(n+1)!(2n+3)2^{2n+3}}\end{aligned}$$

vilket är exakt samma uppskattning som i (1) ovan.
Svar: $p(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{10}x^5$

6. Vi skall beräkna seriens summa genom att se den som funktionsvärde till en lämpligt vald potensserie och sedan bestämma vilken elementär funktion denna potensserie representerar. Ett lämpligt val kan, t.ex. vara

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!(k+2)} x^{k+2} = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \ldots$$

för vilken serien som skall beräknas är $f(1)$. Vi ser ur detta också att $f(0) = 0$. En potensserie med konvergensradie $R > 0$ får enligt Sats 10.16, sid. 465 integreras och deriveras termvis för $|x| < R$. Vi antar därför att vår potensserie har positiv konvergensradie (som vi bestämmer i slutet) och beräknar f'. Vi får

$$f'(x) = D\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!(k+2)} x^{k+2}\right) \overset{\text{Sats10.16}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!(k+2)} D\left(x^{k+2}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^{k+1} =$$
$$= x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k = x\mathrm{e}^x$$

eftersom den sista potensserien är den välkända Maclaurinserien till e^x. Då konvergensradien för denna är $R = \infty$ följer det ur Sats 10.16 att även serien som representerar f har $R = \infty$. Integration ger sedan

$$f(x) = \int f'(x)\, dx = \int x\mathrm{e}^x dx \overset{P.I.}{=} x\mathrm{e}^x - \int \mathrm{e}^x dx = x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + C.$$

För att bestämma C använder vi att

$$0 = f(0) = 0{\cdot}\mathrm{e}^0 - \mathrm{e}^0 + C = C - 1 \iff C = 1$$

vilket ger $\quad f(x) = (x-1)\mathrm{e}^x + 1$ så att $f(1) = 1$, d.v.s.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!(k+2)} = f(1) = 1.$$

Alternativ: Man kan också med en listig omskrivning beräkna delsummorna.

$$\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!(k+2)} = \sum_{k=0}^{N} \frac{k+1}{k!(k+1)(k+2)} = \sum_{k=0}^{N} \frac{k+1}{(k+2)!} = \sum_{k=0}^{N} \frac{(k+2)-1}{(k+2)!} =$$
$$= \sum_{k=0}^{N} \left(\frac{(k+2)}{(k+2)!} - \frac{1}{(k+2)!}\right) = \sum_{k=0}^{N} \left(\frac{1}{(k+1)!} - \frac{1}{(k+2)!}\right) =$$
$$= \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{(k+1)!} - \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{(k+2)!} = \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{(k+1)!} - \sum_{k=1}^{N+1} \frac{1}{(k+1)!} =$$
$$= 1 + \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{(k+1)!} - \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{(k+1)!} - \frac{1}{(N+2)!} =$$
$$= 1 - \frac{1}{(N+2)!} \to 1$$

då $N \to \infty$, d.v.s. den aktuella serien är konvergent med summa 1 enligt definitionen av konvergens.

Svar: $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!(k+2)} = 1$