## SVAR M.M., ENVARIABELANALYS 2, TATA42, 2025-01-10

**1 (a).**

$$\frac{x-\ln(1+x)}{2-2\cos x} = \frac{x-(x-x^2/2+\mathcal{O}(x^3))}{2-2(1-x^2/2+\mathcal{O}(x^4))} = \frac{x^2/2+\mathcal{O}(x^3)}{x^2+\mathcal{O}(x^4)} = \frac{1/2+\mathcal{O}(x)}{1+\mathcal{O}(x^2)} \to 1/2 \text{ då } x \to 0.$$

**Svar:** 1/2.

**1 (b).** Eftersom

$$e^t = 1+t+t^2/2+\mathcal{O}(t^3) \text{ och } \sqrt{1+s} = 1+s/2-s^2/8+\mathcal{O}(s^3)$$

får vi med $t = x^2$ och $s = 2x^2$ att

$$\begin{aligned} 1+\mathrm{e}^{x^2}-\sqrt{1+2x^2} &= 1+(1+x^2+x^4/2+\mathcal{O}(x^6))-(1+x^2-x^4/2+\mathcal{O}(x^6)) \\ &= 1+x^4+\mathcal{O}(x^6) = 1+x^4(1+\mathcal{O}(x^2)). \end{aligned}$$

Eftersom både $x^4$ och $(1+\mathcal{O}(x^2))$ är positiva för $x$ nära 0 ser vi att $f(x) \geq f(1)$ för alla $x$ nära 0, alltså har $f$ ett lokalt minimum i $x = 0$.

**Svar:** Lokalt minimum.

**1 (c).** Vi använder standardutvecklingarna

$$\arctan t = t - t^3/3 + t^5/5 + \mathcal{O}(t^7)$$

och

$$\sin x = x - x^3/6 + x^5/120 + \mathcal{O}(x^7).$$

Alltså får vi

$$\begin{aligned} \arctan(\sin x)) &= (x-x^3/6+x^5/120+\mathcal{O}(x^7)) - \frac{(x-x^3/6+x^5/120+\mathcal{O}(x^7))^3}{3} \\ &+ \frac{(x-x^3/6+x^5/120+\mathcal{O}(x^7))^5}{5} + \mathcal{O}((x-x^3/6+x^5/120+\mathcal{O}(x^7))^7) \\ &= /\text{Vi behåller bara termer av grad} <7 \text{ och lägger in resten i ordoresttermen}/ \\ &= (x-x^3/6+x^5/120) - \frac{x^3-3x^5/6}{3} + \frac{x^5}{5} + \mathcal{O}(x^7) = x - \frac{x^3}{2} + \frac{3x^5}{8} + \mathcal{O}(x^7). \end{aligned}$$

**Svar:** $x - x^3/2 + 3x^5/8 + \mathcal{O}(x^7)$.

**2 (a).** Ekvationen är linjär och homogen. Vi har att

$$p(r) = r^3 - r^2 + 9r - 9 = (r-1)(r^2+9) = (r-1)(r+3i)(r-3i),$$

så allmänna lösningen ges av

$$y = Ae^x + B\cos(3x) + C\sin(3x).$$

**Svar:** $y = Ae^x + B\cos(3x) + C\sin(3x)$.

**2 (b).** Ekvationen

$$4y^3y' = 2(y^4+1)x$$

är separabel, och eftersom $y^4+1 \geq 1$ är den ekvivalent med

$$\frac{4y^3}{y^4+1}y' = 2x.$$

Alltså får vi

$$\int \frac{4y^3}{y^4+1}\,dy = \int 2x\,dx$$

vilket ger

$$\ln(y^4+1) = x^2 + C.$$

Bivillkoret $y(0) = 1$ ger nu att

$$\ln(1+1) = 0^2 + C \Leftrightarrow C = \ln 2.$$

Om vi tar exponentialfunktionen av bägge sidor i vår ekvation får vi nu

$$\mathrm{e}^{\ln(y^4+1)} = \mathrm{e}^{x^2+\ln 2} \Leftrightarrow y^4+1 = 2\mathrm{e}^{x^2}.$$

Den sista ekvationen är ekvivalent med att

$$y = \pm \sqrt[4]{2e^{x^2} - 1},$$

men eftersom vi har $y(0) = 1 > 0$ är vår lösning

$$y = \sqrt[4]{2e^{x^2} - 1}.$$

Vi noterar att $2e^{x^2} - 1 \geq 1$ för alla $x$, så lösningen gäller på hela $\mathbb{R}$.

**Svar:** $y = \sqrt[4]{2e^{x^2} - 1}, \quad x \in \mathbb{R}$.

**3 (a).** Integralen är endast generaliserad i 0, och integranden är positiv (på integrationsintervallet). Eftersom $\sin(x^2) = x^2 + \mathcal{O}(x^6)$ får vi

$$\frac{\sin(x^2)}{x^2\sqrt{x} + x^4} = \frac{x^2 + \mathcal{O}(x^6)}{x^2\sqrt{x} + x^4} = \frac{1 + \mathcal{O}(x^4)}{\sqrt{x} + x^2}.$$

Vi jämför med

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$

som vi vet är konvergent. Från ovanstående ser vi att

$$\frac{\sin(x^2)}{x^2\sqrt{x} + x^4} \bigg/ \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1 + \mathcal{O}(x^4)}{1 + x\sqrt{x}} \to 1 \text{ då } x \to 0^+ \quad (0 < 1 < \infty).$$

Alltså följer det från jämförelseprincipen på gränsvärdesform att även

$$\int_0^1 \frac{\sin(x^2)}{x^2\sqrt{x} + x^4}\,dx$$

är konvergent.

[Alternativt kan man använda uppskattningen $|\sin(t)| \leq t$ för $t \geq 0$ (vilket är välkänt, men också enkelt kan motiveras som följer: $f(t) = t - \sin t$ har derivata $f'(t) = 1 - \cos t \geq 0$ och $f(0) = 0$, så $\sin t \leq t$ för $t \geq 0$, för $0 \leq t \leq 1$ är $\sin t$ ickenegativt, och för $t \geq 1$ är olikheten trivial) vilket tillsammans med att $x^2\sqrt{x} + x^4 \geq x^2\sqrt{x} \geq 0$ ger

$$\left|\frac{\sin(x^2)}{x^2\sqrt{x} + x^4}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{x}},$$

och vi kan därför tillämpa jämförelseprincipen direkt.]

**Svar:** Konvergent.

**3 (b).** Vi använder kvotkriteriet:

$$\left|\frac{x^{3(k+1)}/2^{k+1}(k+1)^3}{x^{3k}/2^k k^3}\right| = \frac{k^3|x|^3}{2(k+1)^3} \to \frac{|x|^3}{2} \text{ då } k \to \infty.$$

Alltså får vi konvergensradien från olikheten $|x|^3/2 < 1$, d.v.s. $R = \sqrt[3]{2}$.

**Svar:** $R = \sqrt[3]{2}$.

**3 (c).** Eftersom

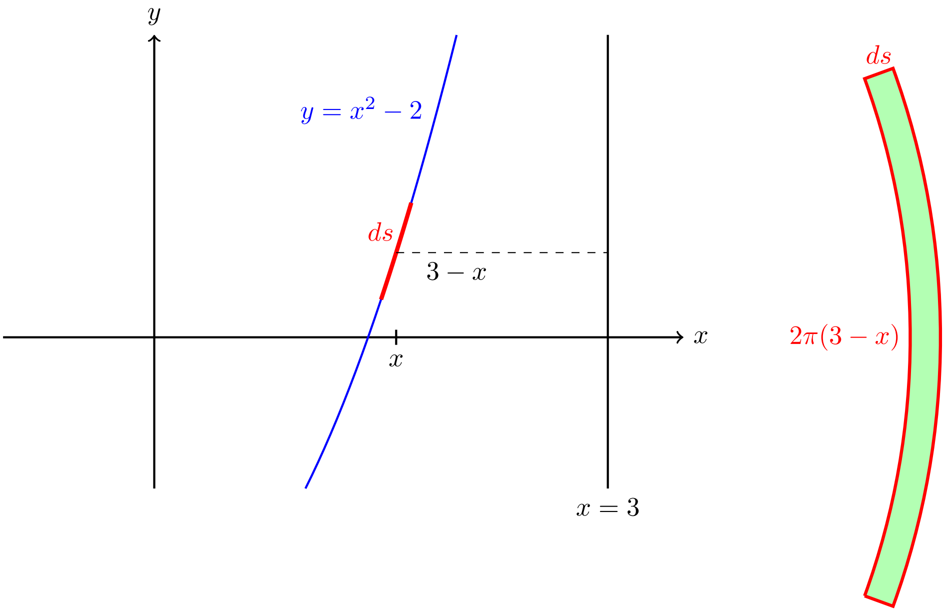
$$0 \leq \frac{1 + x}{x^2 + 2x^3} \leq \frac{1 + x}{2x^3} = \frac{1}{2x^3} + \frac{1}{2x^2}$$

gäller för alla $x \in ]1, \infty[$ får vi

$$\int_1^\infty \frac{1 + x}{x^2 + 2x^3}\,dx \leq \int_1^\infty \left(\frac{1}{2x^3} + \frac{1}{2x^2}\right) dx$$
$$= \lim_{T\to\infty} \left[-\frac{1}{4x^2} - \frac{1}{2x}\right]_1^T = \frac{3}{4}.$$

(Speciellt gäller det från jämförelseprincipen att integralen är konvergent.)

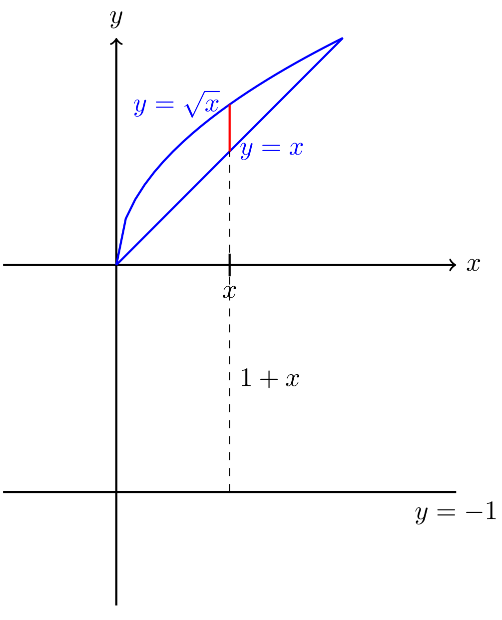
**4 (a).**




Eftersom
$$ds = \sqrt{1 + (y'(x))^2}dx = \sqrt{1 + 4x^2}dx,$$
och $ds$-elementets väg vid rotationen är $2\pi(3 - x)$ så ges den sökta arean av
$$\int_1^2 2\pi(3 - x)\sqrt{1 + 4x^2}\, dx.$$

**Svar:** $\int_1^2 2\pi(3 - x)\sqrt{1 + 4x^2}\, dx.$

**4 (b).**




När den röda stolpen i figuren ovan roteras ett varv runt $y = -1$ uppstår en ihålig cirkelskiva med inre radie $1 + x$ och yttre radie $1 + \sqrt{x}$, som har area $\pi((1 + \sqrt{x})^2 - (1 + x)^2) = \pi(2\sqrt{x} - x - x^2)$. Alltså ges rotationsvolymen av
$$\int_0^1 \pi(2\sqrt{x} - x - x^2)\, dx = \pi\left[\frac{4x^{3/2}}{3} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{\pi}{2}.$$

**Svar:** $\pi/2$.

**5.** Med $f(t) = \sqrt{1+t} = (1+t)^{1/2}$ får vi

$$f'(t) = \frac{1}{2}(1+t)^{-1/2}, \quad f''(t) = -\frac{1}{4}(1+t)^{-3/2}, \quad f'''(t) = \frac{3}{8}(1+t)^{-5/2}.$$

Maclaurins formel av ordning 2 med Lagranges restterm ger då alltså

$$f(t) = f(0) + f'(0)t + \frac{f''(0)}{2!}t^2 + \frac{f'''(\xi)}{3!}t^3 = 1 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{8} + \frac{t^3}{16(1+\xi)^{5/2}} \text{ för något } \xi \text{ mellan } 0 \text{ och } t.$$

Med $t = -x^2$ $(\leq 0)$ får vi då alltså

$$\sqrt{1-x^2} = f(-x^2) = 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} - \frac{x^6}{16(1+\xi)^{5/2}} \text{ för något } \xi \in [-x^2, 0].$$

Om vi nu låter

$$p(x) = 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8}$$

får vi med $\xi$ som ovan, om $|x| \leq 1/3$ att

$$-1/9 \leq -x^2 \leq \xi \leq 0$$

så att

$$\begin{aligned} \left|\sqrt{1-x^2} - p(x)\right| &= \left|-\frac{x^6}{16(1+\xi)^{5/2}}\right| \\ &\leq \frac{(1/3)^6}{16(1-1/9)^{5/2}} = \frac{9^{5/2}}{3^6 \cdot 16 \cdot 8^{5/2}} \leq \frac{1}{3 \cdot 16 \cdot 8^2} = \frac{1}{3072} < \frac{1}{1000}. \end{aligned}$$

**Svar:** $p(x) = 1 - x^2/2 - x^4/8$.

**6.** Med $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ får vi när $|x| < R$, där $R$ är potensseriens konvergensradie,

$$\begin{aligned} y'' - 3x^2y' - 6xy &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} - 3x^2 \sum_{n=0}^{\infty} nc_n x^{n-1} - 6x \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \\ &= 2c_2 + \sum_{n=0}^{\infty} (n+3)(n+2)c_{n+3}x^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} 3nc_n x^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} 6c_n x^{n+1} \\ &= 2c_2 + \sum_{n=0}^{\infty} ((n+3)(n+2)c_{n+3} - (3n+6)c_n)x^{n+1} = 0. \end{aligned}$$

Bivillkoren $y(0) = 1, y'(0) = 0$ ger $c_0 = 1$ och $c_1 = 0$, och ovanstående ekvation ger nu att $c_2 = 0$ samt $(n+3)(n+2)c_{n+3} - (3n+6)c_n = 0$, d.v.s

$$c_{n+3} = \frac{3n+6}{(n+3)(n+2)}c_n = \frac{3}{n+3}c_n,$$

för alla $n \geq 0$. Eftersom $c_1 = 0 \Rightarrow c_4 = 0 \Rightarrow c_7 = 0 \ldots$ och $c_2 = 0 \Rightarrow c_5 = 0 \Rightarrow c_8 = 0$ ser vi att bara var tredje term $c_0, c_3, c_6, c_9$ är skild från noll. Om vi inför $a_k = c_{3k}$ kan då alltså vår funktion skrivas som

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{3k} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x^3)^k.$$

Ekvationen ovan blir nu

$$a_{k+1} = c_{3(k+1)} = c_{3k+3} = \frac{3}{3k+3}c_{3k} = \frac{1}{k+1}a_k.$$

Om vi itererar detta får vi

$$a_{k+1} = \frac{a_k}{k+1} = \frac{a_{k-1}}{(k+1)k} = \ldots = \frac{a_0}{(k+1)!} = \frac{1}{(k+1)!}.$$

Alltså gäller $a_k = 1/k!$ så att

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x^3)^k}{k!}.$$

Eftersom

$$\mathrm{e}^t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!},$$

och denna serie har oändlig konvergensradie ser vi att

$$y = \mathrm{e}^{x^3},$$

och $R = \infty$.

**Svar:** $y = \mathrm{e}^{x^3}$, $x \in \mathbb{R}$.