TATA42 Envariabelanalys 2 2025-03-21, lösningsförslag

1. (a) Vi får successivt

$$f(x) = (1+x)^{1/2},\ f'(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{-1/2},\ f''(x) = -\frac{1}{4}(1+x)^{-3/2},\ f'''(x) = \frac{3}{8}(1+x)^{-5/2},$$

så

$$f(0) = 1, \quad f'(0) = 1/2, \quad f''(0) = -1/4, \quad f'''(\xi) = 3(1+\xi)^{-5/2}/8,$$

varför

$$\sqrt{1+x} = f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(\xi)}{3!}x^3 = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16(1+\xi)^{5/2}}$$

för något $\xi = \xi(x)$ mellan 0 och x. Med $x = -1/5$ får vi sedan

$$\sqrt{\frac{4}{5}} = f\big(-\frac{1}{5}\big) = 1 + \frac{(-1/5)}{2} - \frac{(-1/5)^2}{8} + \frac{(-1/5)^3}{16(1+\xi)^{5/2}} = \frac{200-20-1}{200} - \frac{1}{16\cdot 5^3(1+\xi)^{5/2}}$$

för något ξ mellan 0 och $-1/5$, och eftersom $(1+\xi) \geq 4/5$ och $\sqrt{5} \geq 2$ får vi sedan

$$\left|\sqrt{\frac{4}{5}} - \frac{179}{200}\right| = \frac{1}{16\cdot 5^3(1+\xi)^{5/2}} \leq \frac{1}{16\cdot 5^3(4/5)^{5/2}} = \frac{1}{2^4\cdot 2^5\sqrt{5}} \leq \frac{1}{2^9\cdot 2} = \frac{1}{1024} \leq \frac{1}{1000}.$$

(b) Standardutvecklingarna $e^t = 1 + t + t^2/2 + \mathcal{O}(t^3)$ med $t = -2x^2$ (notera att $x \to 0 \Rightarrow t \to 0$ i alla byten här) och $\cos t = 1 - t^2/2 + t^4/24 + \mathcal{O}(t^6)$ med $t = 2x$ gör att nämnaren

$$N = e^{-2x^2} - \cos 2x = \big(1 - 2x^2 + 2x^4 + \mathcal{O}(x^6)\big) - \big(1 - 2x^2 + 2x^4/3 + \mathcal{O}(x^6)\big) = 4x^4/3 + \mathcal{O}(x^6).$$

Vi utvecklar därför täljaren t.o.m. grad 4 i x. Standardutvecklingarna $\sin t = t + \mathcal{O}(t^3)$ med $t = 2x^2$ och $\ln(1+t) = t - t^2/2 + \mathcal{O}(t^3)$ med $t = -x^2$ gör att täljaren

$$T = \sin 2x^2 + 2\ln(1-x^2) = \big(2x^2 + \mathcal{O}(x^6)\big) + 2\big(-x^2 - x^4/2 + \mathcal{O}(x^6)\big) = -x^4 + \mathcal{O}(x^6),$$

och därmed att

$$\frac{T}{N} = \frac{\sin 2x^2 + 2\ln(1-x^2)}{e^{-2x^2} - \cos 2x} = \frac{-x^4 + \mathcal{O}(x^6)}{4x^4/3 + \mathcal{O}(x^6)} = \frac{-1 + \mathcal{O}(x^2)}{4/3 + \mathcal{O}(x^2)} \to \frac{-1+0}{4/3+0} = \underline{\underline{-\frac{3}{4}}} \quad \text{då } x \to 0.$$

2. (a) Direkt insättning av $y = (1+x^2)/3$ i den givna linjära differentialekvationen ger $y' + f(x)y = 2x/3 + f(x)(1+x^2)/3 = x$, så $f(x) = x/(1+x^2)$; alltså är differentialekvationen

$$y' + \frac{xy}{1+x^2} = x.$$

Denna har integrerande faktor $e^{F(x)} = e^{(\ln(1+x^2))/2} = \sqrt{1+x^2}$ och kan lösas på vanligt sätt, men det är effektivare att utnyttja att vi redan har en partikulärlösning $y_p = (1+x^2)/3$. För att bestämma homogenlösningarna y_h multiplicerar vi den homogena ekvationen $y' + xy/(1+x^2) = 0$ med den integrerande faktorn $\sqrt{1+x^2}$ och får då

$$y' + \frac{xy}{1+x^2} = 0 \ \Leftrightarrow\ y'\sqrt{1+x^2} + \frac{xy}{\sqrt{1+x^2}} = 0 \ \Leftrightarrow\ \Big(y\sqrt{1+x^2}\Big)' = 0 \ \Leftrightarrow\ y = \frac{C}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Således är alla lösningar till differentialekvationen

$$y = y_h + y_p = \frac{C}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1+x^2}{3},$$

och kravet $y(0) = 0$ ger till sist $C = -1/3$. <u>Svar</u>: $y = \dfrac{1+x^2}{3} - \dfrac{1}{3\sqrt{1+x^2}}$.

(b) Det karakteristiska polynomet $p(r) = r^4 + 2r^2 + 1 = (r^2+1)^2$ har nollställena $r_{1,2} = i$ och $r_{3,4} = -i$, så vi får

<u>Svar</u>: $y = (A+Bx)\cos x + (C+Dx)\sin x$.

3. (a) Sätt $a_k = \dfrac{x^{2k}}{2^k + k^2}$ för fixt $x \neq 0$. Eftersom

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{|x|^{2(k+1)}}{2^{k+1} + (k+1)^2} \Big/ \frac{|x|^{2k}}{2^k + k^2} = \frac{|x|^2}{2} \cdot \frac{1 + k^2/2^k}{1 + (k+1)^2/2^{k+1}} \to \frac{|x|^2}{2} = Q$$

då $k \to \infty$ medför kvotkriteriet att serien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ är absolutkonvergent då $Q < 1$, d.v.s. då $|x| < \sqrt{2}$, och divergent då $Q > 1$, d.v.s. då $|x| > \sqrt{2}$; alltså är konvergensradien $R = \sqrt{2}$.

<u>Svar</u>: $R = \sqrt{2}$.

(b) Vi noterar att integranden $f(x) = (\arctan x)/(\sin^2 x)$ är positiv i intervallet $0 < x < \pi/2$ och att integralen är generaliserad endast i 0. Korta standardutvecklingar ger

$$f(x) = \frac{\arctan x}{(\sin x)^2} = \frac{x + \mathcal{O}(x^3)}{(x + \mathcal{O}(x^3))^2} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1 + \mathcal{O}(x^2)}{(1 + \mathcal{O}(x^2))^2},$$

så om vi sätter $g(x) = 1/x$ får vi:

- $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{1 + \mathcal{O}(x^2)}{(1 + \mathcal{O}(x^2))^2} \to 1 = A$ då $x \to 0^+$, där $0 < A < \infty$,
- $\displaystyle\int_0^{\pi/2} g(x)\,dx = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{x}$ är divergent och generaliserad endast i 0.

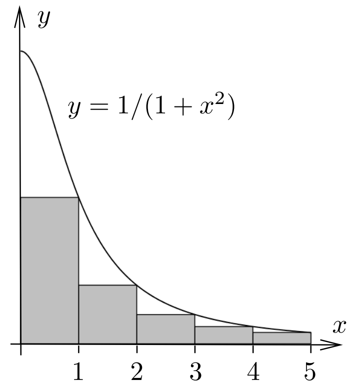
Jämförelsekriteriet på kvotform medför därför att även vår ursprungliga integral $\int_0^{\pi/2} f(x)\,dx$ är divergent.

<u>Svar</u>: Divergent.

(Alternativt kan man använda att $(\arctan x)/x \to 1$ och $(\sin x)/x \to 1$ då $x \to 0^+$, som ju är standardgränsvärden från Envariabelanalys 1.)

(c) Eftersom termerna är positiva ger uppskattning med integral i steg $*$ nedan (se figur)

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+k^2} &= \frac{1}{1+1^2} + \frac{1}{1+2^2} + \frac{1}{1+3^2} + \frac{1}{1+4^2} + \dots \\ &= \frac{1}{2} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{1+k^2} \overset{*}{\leq} \frac{1}{2} + \int_1^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} \\ &= \frac{1}{2} + \big[\arctan x\big]_{x=1}^{x\to\infty} = \frac{2+\pi}{4} \leq \frac{6}{4} = \frac{3}{2},\end{aligned}$$



vilket skulle bevisas.

(Anmärkning: Uppskattningen $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+k^2} \leq \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$ är visserligen rätt, men inte bra nog.)

4. (a) För kurvan $x(t) = t^2$, $y(t) = e^{2t}$, $0 \leq t \leq 1$, blir bågelementet (för växande t)

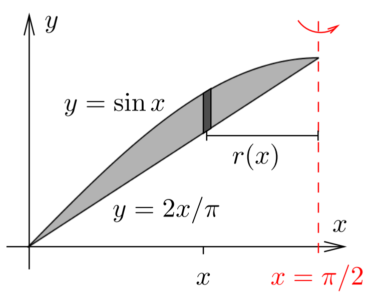
$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{(dx/dt)^2 + (dy/dt)^2}\,dt = \sqrt{(2t)^2 + (2e^{2t})^2}\,dt = 2\sqrt{t^2 + e^{4t}}\,dt = ds(t),$$

så kurvlängden

$$L = \int_0^1 ds(t) = \underline{\underline{\int_0^1 2\sqrt{t^2 + e^{4t}}\,dt.}}$$

(b) När den mörkare tunna stapeln vid x i figuren roterar ett varv kring linjen $x = \pi/2$ genereras ett tunt rör med

höjd $h(x) = \sin x - 2x/\pi$,
radie $r(x) = \pi/2 - x$,
tjocklek $= dx$.



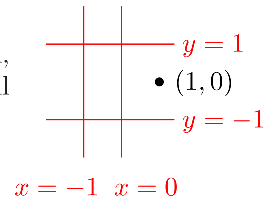
Rörets volym blir därför

$$dV(x) = 2\pi r(x)h(x)\,dx = 2\pi(\pi/2 - x)(\sin x - 2x/\pi)\,dx$$

och hela rotationskroppens volym blir

$$
\begin{aligned}
V &= \int_0^{\pi/2} dV(x) = \int_0^{\pi/2} 2\pi(\pi/2 - x)(\sin x - 2x/\pi)\, dx \\
&= 2\pi\left(\left[(\pi/2 - x)(-\cos x - x^2/\pi)\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} (-1)(-\cos x - x^2/\pi)\, dx \right) \\
&= 2\pi\left(\pi/2 - \left[\sin x + x^3/3\pi\right]_0^{\pi/2}\right) = \underline{\underline{\pi^2 - 2\pi - \pi^3/12}}.
\end{aligned}
$$

5. Till att börja med ser vi att $x \neq -1$ och $x \neq 0$ krävs i differentialekvationen, och eftersom $y(1) = 0$ kommer lösningen att vara definierad i ett delintervall av $x > 0$, eventuellt hela intervallet $x > 0$.
Separation av variablerna ger, eftersom $y(1) = 0 \neq \pm 1$,



$$
\frac{y'}{x+1} = \frac{y^2-1}{2x} \quad \overset{y \neq \pm 1}{\Leftrightarrow} \quad \int \frac{2\, dy}{y^2-1} = \int \frac{x+1}{x}\, dx = \int \left(1 + \frac{1}{x}\right) dx, \qquad x > 0.
$$

Partialbråksuppdelningen $2/(y^2-1) = 1/(y-1) - 1/(y+1)$ och integration ger nu

$$
\ln|y-1| - \ln|y+1| = x + \ln|x| + C = /x > 0/ = x + \ln x + C,
$$

och $y(1) = 0$ ger $C = -1$. Alltså,

$$
\ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right| = x + \ln x - 1 \quad \Leftrightarrow \quad \left|\frac{y-1}{y+1}\right| = \exp(x + \ln x - 1) = x\, e^{x-1} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y-1}{y+1} = \pm x\, e^{x-1},
$$

där '$-$' gäller eftersom $y(1) = 0$. Alltså får vi

$$
\frac{y-1}{y+1} = -x\, e^{x-1} \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{1 - x\, e^{x-1}}{1 + x\, e^{x-1}} = \frac{e - x\, e^x}{e + x\, e^x},
$$

och största delintervall av $x > 0$ där $y(x)$ är en lösning är alltså $x > 0$, eftersom $e + x\, e^x \neq 0$ där.

<u>Svar</u>: $y(x) = \dfrac{e - x\, e^x}{e + x\, e^x}$, $x > 0$.

(Anmärkning: Funktionen $y(x)$ är visserligen definierad för alla reella x (varför?), men den är en lösning till differentialekvationen endast där $x > 0$.)

6. Då $|x| < 1$ är $\arctan x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k+1}/(2k+1)$, Maclaurinserien, och där får den integreras termvis. Vi får därför

$$
\begin{aligned}
\int_0^{1/2} \frac{\arctan x}{x}\, dx &= \int_0^{1/2} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{2k+1}\right) dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{1/2} \frac{(-1)^k x^{2k}}{2k+1}\, dx = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)^2}\right]_{x=0}^{x=1/2} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (1/2)^{2k+1}}{(2k+1)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k+1} \cdot (2k+1)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k.
\end{aligned}
$$

Denna serie är alternerande, och eftersom $2^{2k+1} \cdot (2k+1)^2$ växer mot oändligheten då $k \to \infty$ ser vi att $|a_k| \searrow 0$ (*avtar* mot noll) då $k \to \infty$. Vi har således en Leibnizserie, och för dess summa s gäller därför olikheten

$$
(*) \qquad |s - s_n| \leq |a_{n+1}|, \quad \text{där} \quad s_n = a_0 + \ldots + a_n.
$$

Prövning ger

$$
|a_3| = \frac{1}{2^7 \cdot 7^2} = \frac{1}{128 \cdot 49} \leq \frac{1}{1000},
$$

så $n = 2$ räcker i $(*)$. Alltså,

$$
\int_0^{1/2} \frac{\arctan x}{x}\, dx = s \approx s_2 = a_0 + a_1 + a_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{72} + \frac{1}{800} \quad \left(= \frac{3509}{7200}\right)
$$

med ett fel vars absolutbelopp är högst $1/1000$.

<u>Svar</u>: $a_k = \dfrac{(-1)^k}{2^{2k+1} \cdot (2k+1)^2}$; approximationen $= \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{72} + \dfrac{1}{800}$.