Lösningsförslag envariabelanalys 2 2025-06-05

1. (a) Taylors formel

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + O((x-a)^3)$$

med $f(x) = \cos x$ och $a = \pi/3$ visar att

$$\cos x = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{4}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 + O\left(\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3\right).$$

(b) Vi behöver standardutvecklingarna

$$e^s = 1 + s + \frac{s^2}{2} + \frac{s^3}{6} + O(s^4), \quad \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + O(x^5),$$
$$\text{och} \quad (1+t)^{1/2} = 1 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{8} + O(t^3),$$

så med $s = -x$ samt $t = x^2$ blir

$$\begin{aligned} f(x) &= x + 2x\left(1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + O(x^4)\right) + 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + O(x^6) \\ &\quad - 3\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + O(x^5)\right) \\ &= 1 + \frac{7x^4}{24} + O(x^5) = 1 + x^4\left(\frac{7}{24} + O(x)\right). \end{aligned}$$

Därmed ser vi att för x nära 0 blir parentesen större än noll och då $x^4 \geq 0$ med likhet endast då $x = 0$, så kommer $f(x) > f(0) = 1$ när $x \neq 0$ men nära 0. Således har vi ett lokalt minimum i $x = 0$.

(c) Notera att

$$\frac{\tan x - \arctan x}{x^2 \sin x} = \frac{\sin x - \arctan x \cos x}{x^2 \sin x \cos x} = \frac{\sin x - \arctan x \cos x}{\frac{1}{2} x^2 \sin 2x}$$

så med standardutvecklingarna

$$\sin t = t - \frac{t^3}{6} + O(t^5), \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + O(x^4) \quad \text{och} \quad \arctan x = x - \frac{x^3}{3} + O(x^5)$$

ser vi att täljaren blir

$$T(x) = x - \frac{x^3}{6} + O(x^5) - \left(x - \frac{x^3}{3} + O(x^5)\right)\left(1 - \frac{x^2}{2} + O(x^4)\right) = \frac{2x^3}{3} + O(x^5)$$

och att nämnaren blir

$$N(x) = \frac{1}{2}x^2\left(2x + O(x^3)\right) = x^3 + O(x^5).$$

Med hjälp av dessa utvecklingar finner vi att

$$\frac{T(x)}{N(x)} = \frac{\frac{2x^3}{3} + O(x^5)}{x^3 + O(x^5)} = \frac{\frac{2}{3} + O(x^2)}{1 + O(x^2)} \to \frac{2}{3}, \quad \text{då } x \to 0.$$

Svar: (a) se ovan (b) lokalt minimum (c) $\frac{2}{3}$.

Anmärkning. Om man kan utvecklingen $\tan x = x + x^3/3 + O(x^5)$ är det OK att använda den istället på (c).

2. Ekvationen är linjär med konstanta koefficienter och har det karakteristiska polynomet

$$p(r) = r^3 + 3r^2 - 4 = (r^2 + 4r + 4)(r - 1) = (r + 2)^2(r - 1),$$

vilket vi till exempel ser genom att gissa roten $r = 1$ följt av polynomdivision. Således ges (enligt känd sats) lösningarna till den homogena ekvationen $p(D)y_h = 0$ av

$$y_h = C_1\mathrm{e}^x + (C_2 + C_3x)\mathrm{e}^{-2x}.$$

Vi söker en partikulärlösning så att

$$p(D)y_{p_1} = 9\,\mathrm{e}^x.$$

Vi ansätter $y_{p_1} = z(x)\mathrm{e}^x$. Genom direkt derivering finner vi att

$$y'_{p_1} = (z' + z)\mathrm{e}^x, \quad y''_{p_1} = (z'' + 2z' + z)\mathrm{e}^x \quad y'''_{p_1} = (z''' + 3z'' + 3z' + z)\mathrm{e}^x.$$

Insatt i ekvationen ger detta

$$\begin{aligned} p(D)(z\mathrm{e}^x) &= (z''' + 3z'' + 3z' + z)\mathrm{e}^x + 3(z'' + 2z' + z)\mathrm{e}^x - 4z\mathrm{e}^x \\ &= (z''' + 6z'' + 9z')\mathrm{e}^x, \end{aligned}$$

så

$$z''' + 6z'' + 9z' = 9.$$

Vi söker en lösning till denna ekvation och ansätter $z_p = Ax$, vilket leder till att $A = 1$. Därmed är $z_p = x$ och $y_{p_1} = x\mathrm{e}^x$.

För att hitta en partikulärlösning till ekvationen $P(D)y_{p_2} = 8 - 4x$ kan vi göra ansatsen $y_{p_2} = Bx + D$, så $y'_{p_2} = B$ och $y'''_{p_2} = y''_{p_2} = 0$. Insatt i ekvationen ger detta

$$-4(Bx + D) = 8 - 4x \quad \Leftrightarrow \quad -4B = -4 \text{ och } -4D = 8.$$

Alltså måste $B = 1$ och $D = -2$.

Vi har därmed funnit den allmänna lösningen

$$y = y_h + y_{p_1} + y_{p_2} = C_1\mathrm{e}^x + (C_2 + C_3x)\mathrm{e}^{-2x} + x\mathrm{e}^x + x - 2.$$

Svar: $y(x) = \big(C_1 + x\big)\mathrm{e}^x + \big(C_2 + C_3x\big)\mathrm{e}^{-2x} + x - 2$, $x \in \mathbf{R}$.

3. (a) Eftersom

$$\left|\frac{x^{3k}}{k^2\,8^k}\right|^{1/k} = \frac{|x|^3}{k^{2/k}\cdot 8} \to \frac{|x|^3}{8}, \quad \text{då } k \to \infty,$$

eftersom $k^{2/k} = \exp((2/k)\ln k) \to \exp(0) = 1$. Rottestet säger då att serien är absolutkonvergent om

$$\frac{|x|^3}{8} < 1 \quad \Leftrightarrow \quad |x| < 2$$

och divergent om $|x| > 2$. Alltså är konvergensradien $R = 2$. I ändpunkterna ser vi att

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\pm 2)^{3k}}{k^2 8^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\pm 1)^{3k}}{k^2}$$

är absolutkonvergent i båda punkterna eftersom

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{(\pm 1)^{3k}}{k^2} \right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

är känt konvergent ($\alpha = 2 > 1$).

(b) Integralen i frågan är endast generaliserad i oändligheten. Vi ser att

$$0 \leq \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x} + x^2} \leq \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}} = \mathrm{e}^{-x},$$

så

$$0 \leq \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x} + x^2}\, dx \leq \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-x}\, dx = \left[-\mathrm{e}^{-x}\right]_0^{\infty} = 1.$$

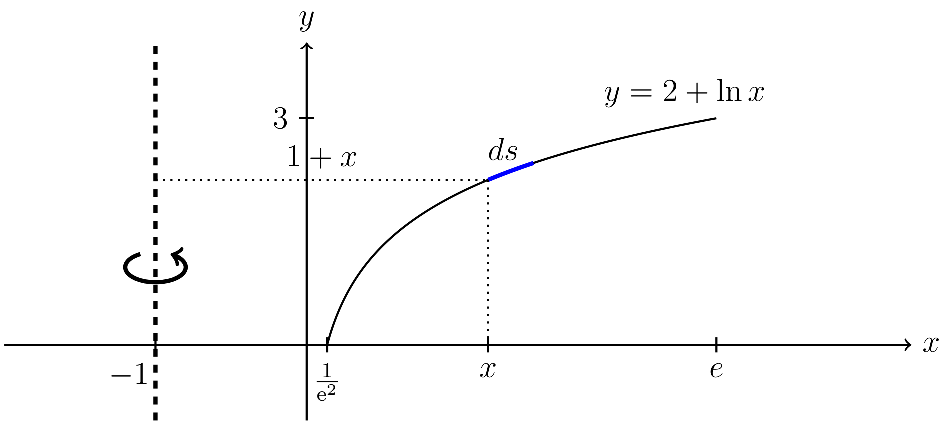
Enligt jämförelsesats följer det att integralen i fråga är konvergent och har ett värde mindre än eller lika med 1.

Svar: (a) $-2 \leq x \leq 2$ (b) se ovan.

4. (a) Bågelementet finner vi enligt

$$ds(x) = \sqrt{1 + y'(x)^2}\, dx = \sqrt{1 + (1/x)^2}\, dx = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\, dx, \quad \frac{1}{\mathrm{e}^2} \leq x \leq e,$$

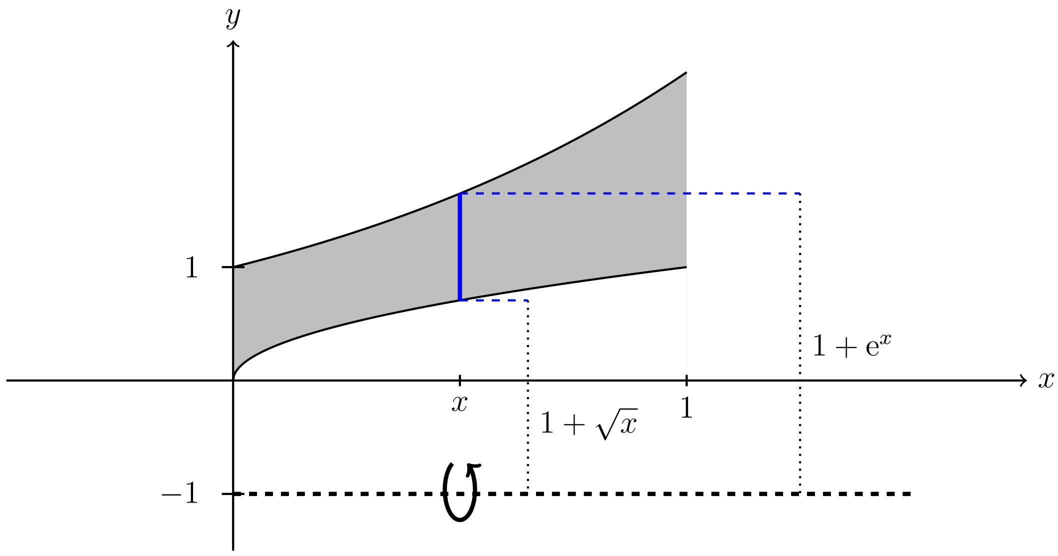
och rotation sker kring $x = -1$. Vi ritar en principskiss.



Rotationsarean som uppstår då kurvan roterar ett varv kring $x = -1$ kan beräknas enligt

$$A = 2\pi \int_{1/\mathrm{e}^2}^{e} (1+x)\, ds(x) = 2\pi \int_{1/\mathrm{e}^2}^{e} \frac{(1+x)\sqrt{x^2+1}}{x}\, dx.$$

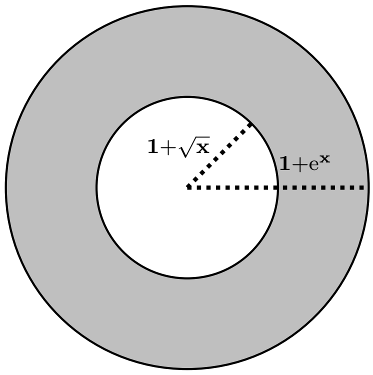
(b) Vi börjar med att rita en figur.



Rotationsvolymen som uppstår då området $\sqrt{x} \le y \le e^x$, $0 \le x \le 1$, roterar ett varv kring $y = -1$, kan beräknas med hjälp av skivformeln enligt

$$\begin{aligned}
&\pi \int_0^1 \left((e^x + 1)^2 - (\sqrt{x} + 1)^2 \right) \, dx \\
&\qquad = \pi \int_0^1 \left(e^{2x} + 2e^x - x - 2\sqrt{x} \right) \, dx \\
&\qquad = \pi \left[\frac{e^{2x}}{2} + 2e^x - \frac{x^2}{2} - \frac{4x^{3/2}}{3} \right]_0^1 \\
&\qquad = \pi \left(\frac{e^2}{2} + 2e - \frac{13}{3} \right).
\end{aligned}$$

Ett tvärsnitt vid x:



Svar: (a) $2\pi \int_{1/e^2}^{e} \frac{(1+x)\sqrt{1+x^2}}{x} \, dx$ (b) $\pi \left(\frac{e^2}{2} + 2e - \frac{13}{3} \right)$.

5. Sätt $f(x) = \ln(1+t)$. Direkt derivering ger

$$f'(t) = (1+t)^{-1}, \quad f''(t) = -(1+t)^{-2}, \quad f^{(3)}(t) = 2(1+t)^{-3}, \quad f^{(4)}(t) = -6(1+t)^{-4}$$
$$\text{och } f^{(5)}(t) = 24(1+t)^{-5},$$

så

$$f(0) = 0,\ f'(0) = 1,\ f''(0) = -1,\ f^{(3)}(0) = 2,\ f^{(4)}(0) = -6 \text{ och } f^{(5)}(\xi) = 24(1+\xi)^{-5}.$$

Maclaurinutvecklingen av ordning 4 för $\ln(1+t)$ blir därför

$$\begin{aligned}
\ln(1+t) = f(t) &= f(0) + f'(0)t + \frac{f''(0)}{2!}t^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}t^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}t^4 + \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}t^5 \\
&= t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \frac{t^5}{5(1+\xi)^5}
\end{aligned}$$

för något $\xi = \xi(t)$ mellan 0 och t. Med $t = x^2$ ser vi att

$$\underbrace{\ln(1+x^2)}_{\text{Exakt värde}} = f(x^2) = \underbrace{x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} - \frac{x^8}{4}}_{\text{Approximation}} + \underbrace{\frac{x^{10}}{5(1+\xi)^5}}_{\text{Approximationsfel}}$$

för något $\xi = \xi(x)$ mellan 0 och x^2.

Antag att $|x| \leq 1/2$. Eftersom ξ ligger mellan 0 och x^2 så gäller att $\xi \geq 0$. Därmed blir $1 + \xi \geq 1$ så $1/(1+\xi)^5 \leq 1$. Detta visar att

$$\begin{aligned} \left|\ln(1+x) - \left(x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} - \frac{x^8}{4}\right)\right| &= \left|\frac{x^{10}}{5(1+\xi)^5}\right| = \frac{|x|^{10}}{5(1+\xi)^5} \\ &\leq \frac{|x|^{10}}{5} \leq \frac{1}{5 \cdot 2^{10}} = \frac{1}{5 \cdot 1024} \leq \frac{1}{5000}. \end{aligned}$$

Svar: $p(x) = x^2 - \dfrac{x^4}{2} + \dfrac{x^6}{3} - \dfrac{x^8}{4}$.

Alternativt. Eftersom $\ln(1+t) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} t^k}{k}$ med $R = 1$ så blir

$$\ln(1+x^2) = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}(x^2)^k}{k}}_{\text{approximation}} + \underbrace{\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}(x^2)^k}{k}}_{\text{fel}}.$$

Vi vill att felet ska vara högst 1/5000 och så vi uppskattar svansen på serien och utnyttjar då att serien är konvergent enligt Leibniz (visa det!):

$$\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}(x^2)^k}{k}\right| \leq \left|\frac{(-1)^{n+2}(x^2)^{n+1}}{n+1}\right| = \frac{|x|^{2n+2}}{n+1}$$

För $|x| \leq 1/2$ erhåller vi att $\dfrac{|x|^{2n+2}}{n+1} \leq \dfrac{1}{(n+1)2^{2n+2}}$. Genom att testa ser vi att $n = 4$ gör att $(n+1)2^{2n+2} = 5 \cdot 1024 > 5000$. Vår approximation blir således:

$$p(x) = \sum_{k=1}^{4} \frac{(-1)^k x^{2k}}{k} = x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} - \frac{x^8}{4}.$$

6. Potensserien $y(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ har en konvergensradie R. Antag att $R > 0$ (eller möjligen att $R = \infty$) och att $|x| < R$. Då gäller att

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) c_{n+1} x^n \quad \text{och} \quad y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2}.$$

Eftersom

$$xy'' = x \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) n c_{n+1} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) n c_{n+1} x^n$$

så gäller att

$$\begin{aligned} xy''(x) + y'(x) - y(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \big((n+1)nc_{n+1} + (n+1)c_{n+1} - c_n\big)x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \big((n+1)^2 c_{n+1} - c_n\big)x^n. \end{aligned}$$

Villkoret $y(0) = 1$ i uppgiften ger att $c_0 = 1$. Vi vill nu lösa $xy'' + y' - y = 0$, så entydigheten för potensserieutvecklingar innebär att $c_0 = 1$ och

$$(n+1)^2 c_{n+1} - c_n = 0 \quad \Leftrightarrow \quad c_{n+1} = \frac{c_n}{(n+1)^2} \quad \text{för } n \geq 0. \tag{1}$$

Alltså måste

$$c_1 = \frac{c_0}{1^2} = 1, \qquad c_2 = \frac{c_1}{2^2} = \frac{1}{2^2}, \qquad c_3 = \frac{c_2}{3^2} = \frac{1}{2^2 3^2}, \qquad c_4 = \frac{c_3}{4^2} = \frac{1}{2^2 3^2 4^2}, \qquad \cdots$$

ur vilket vi ser att $c_n = 1/(n!)^2$ för $n \geq 0$. Lösningen vi söker ges alltså av

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n!)^2}.$$

Vi bestämmer konvergensradien med kvottestet:

$$\left| \frac{x^{n+1}/((n+1)!)^2}{x^n/(n!)^2} \right| = |x| \frac{(n!)^2}{((n+1)!)^2} = \frac{|x|}{(n+1)^2} \to 0, \quad n \to \infty.$$

Eftersom $0 < 1$ så är serien konvergent för alla x, dvs $R = \infty$.

Dessutom, då $(n!)^2 \geq n!$ för $n \geq 0$ (observera att $0! = 1$), så gäller att

$$|y(x)| = \left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n!)^2} \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x|^n}{(n!)^2} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x|^n}{n!} = \mathrm{e}^{|x|}$$

för alla $x \in \mathbf{R}$ eftersom $\mathrm{e}^t = \sum_{k=0}^{\infty} t^k/k!$ gäller för alla $t \in \mathbf{R}$.

Svar: $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n!)^2}$. Konvergensradien är oändlig.