Lösningsförslag till tentamen i Envariabelanalys 2, 2024-08-29 kl 08.00–13.00

1. (a) Vi börjar med att Maclaurinutveckla nämnaren

$$N(x) = x \ln(1+x) = x\left(x + \mathcal{O}(x^2)\right) = x^2 + \mathcal{O}(x^3)\,.$$

Följaktligen räcker det att utveckla täljaren till grad 2

$$T(x) = \cos x - \mathrm{e}^{x^2} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \mathcal{O}(x^4) - \left(1 + x^2 + \mathcal{O}(x^4)\right) = -\frac{3}{2}x^2 + \mathcal{O}(x^4)$$

vilket ger

$$\frac{T(x)}{N(x)} = \frac{-\frac{3}{2}x^2 + \mathcal{O}(x^4)}{x^2 + \mathcal{O}(x^3)} = \frac{-\frac{3}{2} + \mathcal{O}(x^2)}{1 + \mathcal{O}(x)} \to \frac{-\frac{3}{2} + 0}{1 + 0} = -\frac{3}{2}$$

då $x \to 0$.

(b) Med $f(x) = \cos x$ fås femtederivatan $f^{(5)}(x) = -\sin(x)$ så att

$$\cos x = f(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}x^5 = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{\sin\xi}{5!}x^5$$

för något ξ mellan 0 och x. Detta ger

$$\cos\frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^2} + \frac{1}{24}\cdot\frac{1}{2^4} - \frac{\sin\xi}{5!}\cdot\frac{1}{2^5} = \frac{7}{8} + \frac{1}{24}\cdot\frac{1}{16} - \frac{\sin\xi}{120\cdot 32} =$$
$$= \frac{7\cdot 48 + 1}{8\cdot 48} - \frac{\sin\xi}{120\cdot 32} = \frac{337}{384} - \frac{\sin\xi}{120\cdot 32}$$

för något ξ: $0 \le \xi \le \frac{1}{2}$. Detta ger att

$$\left|\cos\frac{1}{2} - \frac{337}{384}\right| = \frac{|\sin\xi|}{120\cdot 32} \le \frac{1}{120\cdot 32} \le \frac{1}{100\cdot 30} = \frac{1}{3000}$$

vilket var det som skulle visas.

Anmärkning: Närmevärdet är betydligt bättre då man enkelt kan utveckla ett steg till. Då termen av grad 5 är 0 får vi restterm av grad 6 och med liknande uppskattning att $|\text{felet}| \le \frac{1}{6!\cdot 2^6} = \frac{1}{46080}$.

Svar: (a) $-\frac{3}{2}$, (b) Se ovan.

2. (a) Vi börjar med det i ekvationen inbyggda startvärdet och sätter in det enda x-värde för vilket vi inte behöver veta lösningen för att kunna beräkna integralen, $x = 0$. Vi får

$$y(0) = -1 + \int_0^0 \frac{1 + y(t)^2}{y(t)}\, t\, dt = -1 + 0 = -1.$$

Derivering av ekvationen ger sedan (antag $y(x) \neq 0$)

$$y'(x) = \frac{1 + y(x)^2}{y(x)}x \iff \frac{yy'}{1+y^2} = x \iff$$
$$\int \frac{y}{1+y^2}\, dy = \frac{1}{2}\ln(1+y^2) = \int x\, dx = \frac{1}{2}x^2 + C.$$

Insättning av begynnelsevillkoret ger

$$\frac{1}{2}\ln\left(1+(-1)^2\right)=\frac{1}{2}\ln 2=0+C=C$$

så att

$$\ln\left(1+y^2\right)=x^2+\ln 2 \iff 1+y^2=\mathrm{e}^{x^2+\ln 2}=2\mathrm{e}^{x^2} \iff$$
$$\iff y^2=2\mathrm{e}^{x^2}-1 \iff y=\pm\sqrt{2\mathrm{e}^{x^2}-1}.$$

Då $y(0)=-1<0$ är det $-\sqrt{\dots}$ som är lösningen och då

$$2\mathrm{e}^{x^2}-1\geq 2\mathrm{e}^0-1=1>0$$

för alla $x\in\mathbb{R}$ så är lösningens definitionsmängd $x\in\mathbb{R}$.

(b) Ekvationens karakteristiska polynom blir

$$p(r)=r^3-r^2+r-1=r^2(r-1)+(r-1)=(r-1)(r^2+1)$$

som har rötterna $1,\pm i$ vilket ger lösningarna

$$y=y_h=A\mathrm{e}^x+B\cos x+C\sin x,$$

A,B,C är godtyckliga reella konstanter

Svar: (a) $y=-\sqrt{2\mathrm{e}^{x^2}-1}$, $\quad x\in\mathbb{R}$, $\quad$ (b) Se ovan.

3. (a) Låt $a_k=\dfrac{x^{2k}}{k^2+4^k}$ och använd rotkriteriet.

$$|a_k|^{1/k}=\frac{|x|^2}{(k^2+4^k)^{1/k}}=\frac{|x|^2}{4}\frac{1}{\left(1+\frac{k^2}{4^k}\right)^{1/k}}\to\frac{|x|^2}{4}=Q$$

då $k\to\infty$. Rotkriteriet ger då att vi har absolutkonvergens om

$$Q=\frac{|x|^2}{4}<1 \iff |x|<2$$

och divergens om $Q>1 \iff |x|>2$, d.v.s. konvergensradien är 2.

(b) Integralen är endast generaliserad i ∞ och integranden är positiv i hela integrationsintervallet. Studera integranden och bryt ut de för stora x dominerande termerna ur täljare respektive nämnare. Vi får

$$f(x)=\frac{x+\cos x}{x+x^2}=\frac{x}{x^2}\cdot\frac{1+\frac{\cos x}{x}}{1+\frac{1}{x}}=\frac{1}{x}\cdot\frac{1+\frac{\cos x}{x}}{1+\frac{1}{x}}=g(x)\cdot h(x)$$

Då $h(x)\to 1>0$ då $x\to\infty$ är $g(x)=1/x$ rätt integrand att jämföra med. Då

$$\int_1^\infty g(x)\,dx=\int_1^\infty\frac{dx}{x}$$

är divergent ger Sats 10.13 (Jämförelsesats II för generaliserade integraler), sid 458 i kursboken att

$$\int_1^\infty f(x)\,dx=\int_1^\infty\frac{x+\cos x}{x+x^2}\,dx$$

också är divergent.

(c) Serien kan ses som summan av två konvergenta geometriska serier med kvot $\frac{1}{2}$ respektive $-\frac{1}{3}$, konvergenta eftersom absolutbeloppet av respektive kvot är strikt mindre än 1. Då värdet av en konvergent geometrisk serie beräknas som

$$\text{första termen}\cdot\frac{1}{1-\text{kvoten}}$$

följer det att

$$\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{1}{2^k}+\frac{(-1)^k}{3^k}\right)=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{2^k}+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k}{3^k}=\frac{1}{2^2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}}+\frac{(-1)^2}{3^2}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{3}}=$$
$$=\frac{1}{4}\cdot 2+\frac{1}{9}\cdot\frac{3}{4}=\frac{1}{2}+\frac{1}{12}=\frac{7}{12}.$$

Svar: (a) Konvergensradien är 2. (b) Integralen är divergent, (c) $\frac{7}{12}$.

4. (a) Med $r(\varphi)=\varphi$ blir bågelementet

$$ds=\sqrt{r'(\varphi)^2+r(\varphi)^2}\,d\varphi=\sqrt{1+\varphi^2}\,d\varphi.$$

Kommer man inte ihåg bågelementet i polära koordinater kan man förstås härleda det

$$\begin{cases} x(\varphi) &= \varphi\cos\varphi \\ y(\varphi) &= \varphi\sin\varphi \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x'(\varphi) &= \cos\varphi-\varphi\sin\varphi \\ y'(\varphi) &= \sin\varphi+\varphi\cos\varphi \end{cases}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow (x'(\varphi))^2+(y'(\varphi))^2=(\cos\varphi-\varphi\sin\varphi)^2+(\sin\varphi+\varphi\cos\varphi)^2=$$
$$=\cos^2\varphi-2\varphi\sin\varphi\cos\varphi+\varphi^2\sin^2\varphi+$$
$$+\sin^2\varphi+2\varphi\sin\varphi\cos\varphi+\varphi^2\cos^2\varphi=1+\varphi^2\Rightarrow$$
$$\Rightarrow ds=\sqrt{(x'(\varphi))^2+(y'(\varphi))^2}d\varphi=\sqrt{1+\varphi^2}\,d\varphi.$$

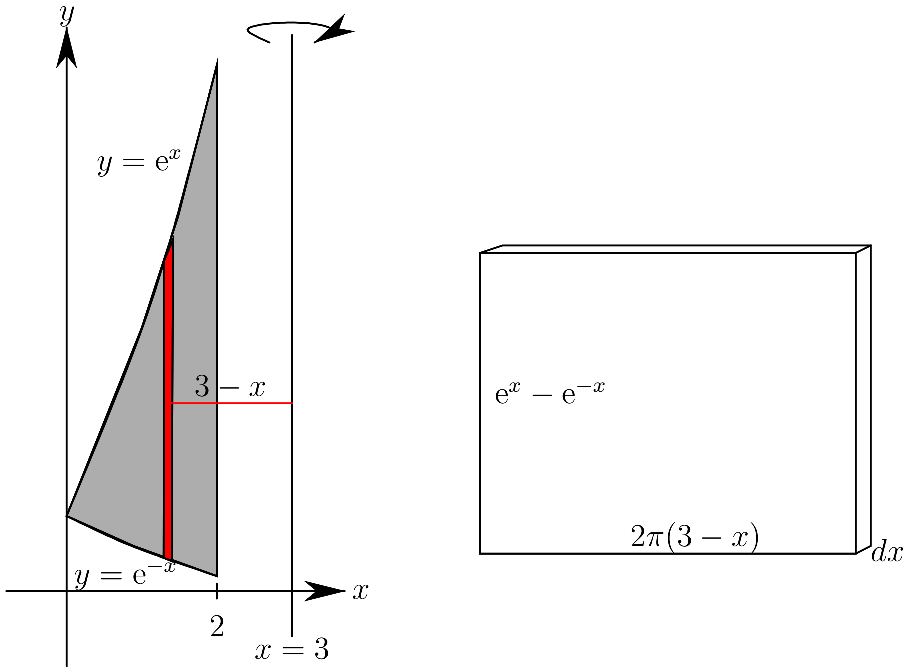
Längden $L(\Gamma)$ av kurvan Γ ges därför av integralen

$$L(\Gamma)=\int_{\pi/6}^{\pi/3}\sqrt{1+\varphi^2}\,d\varphi.$$

Integralen går att räkna ut. Se testövning 5.24(d), sid 269 i boken.

(b) Ur figuren nedan ser vi att då den röda remsan roteras ett varv kring $x=3$ fås ett tunnväggigt rör med radie $3-x$, höjd $\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}$ och väggtjocklek dx. Klippper vi upp detta och vecklar ut det får vi ett rätblock med bas = omkretsen = 2π·radien och samma höjd respektive tjocklek. Härur följer

$$dV=2\pi(3-x)\left(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}\right)dx$$
$$V=\int dV=2\pi\int_0^2(3-x)\left(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}\right)dx\overset{P.I.}{=}$$
$$=2\pi\left(\left[(3-x)\left(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}\right)\right]_0^2+\int_0^2\left(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}\right)dx\right)=$$
$$=2\pi\left(\mathrm{e}^2+\mathrm{e}^{-2}-3\cdot 2+\left[\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}\right]_0^2\right)=2\pi\left(\mathrm{e}^2+\mathrm{e}^{-2}-6+\mathrm{e}^2-\mathrm{e}^{-2}\right)=$$
$$=2\pi\left(2\mathrm{e}^2-6\right)=4\pi\left(\mathrm{e}^2-3\right).$$



Svar: (a) $L(\Gamma) = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \sqrt{1+\varphi^2}\, d\varphi$, (b) Kroppens volym blir $4\pi\,(\mathrm{e}^2 - 3)$.

5. Integranden är positiv i hela integrationsintervallet och integralen är generaliserad i både 0 och ∞ varför vi delar upp integralen

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{x^{1/3}} - \frac{1}{(1+x)^{1/3}}\right)^{3/2} dx = \int_0^1 \ldots\, dx + \int_1^\infty \ldots\, dx.$$

För små $x > 0$ är den andra termen i parentesen "ofarlig" och vi bryter ut den dominerande termen $1/x^{1/3}$. Då fås

$$\left(\frac{1}{x^{1/3}} - \frac{1}{(1+x)^{1/3}}\right)^{3/2} = \left(\frac{1}{x^{1/3}}\right)^{3/2}\left(1 - \frac{x^{1/3}}{(1+x)^{1/3}}\right)^{3/2} = \underbrace{\frac{1}{x^{1/2}}}_{=g_0(x)}\underbrace{\left(1 - \frac{x^{1/3}}{(1+x)^{1/3}}\right)^{3/2}}_{=h_0(x)\to 1>0 \text{ då } x\to 0^+}. \tag{1}$$

Då

$$\int_0^1 g_0(x)\,dx = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

är konvergent så ger Sats 10.13 (Jämförelsesats II för generaliserade integraler), sid 458 i boken att även

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{x^{1/3}} - \frac{1}{(1+x)^{1/3}}\right)^{3/2} dx$$

är konvergent.

Anmärkning: Då den andra termen i parentesen är "ofarlig" nära 0 kan man också göra såhär:

$$0 < \int_0^1 \left(\frac{1}{x^{1/3}} - \frac{1}{(1+x)^{1/3}}\right)^{3/2} dx \leq \int_0^1 \left(\frac{1}{x^{1/3}} - 0\right)^{3/2} dx = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2,$$

d.v.s. den första delintegralen är konvergent.
För stora x gör vi exakt samma kalkyl som ledde fram till (1) ovan. Skillnaden nu är att uttrycket i parentesen $\to 0$ då $x \to \infty$ så denna faktor behöver studeras vidare. Vi får

$$\begin{aligned} 1 - \frac{x^{1/3}}{(1+x)^{1/3}} &= 1 - \frac{1}{(1+\frac{1}{x})^{1/3}} = 1 - \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{-1/3} = \left[\frac{1}{x} = t\right] = \\ &= 1 - (1+t)^{-1/3} = 1 - \left(1 - \frac{1}{3}t + \mathcal{O}(t^2)\right) = \frac{1}{3}t + \mathcal{O}(t^2) = \\ &= t\left(\frac{1}{3} + \mathcal{O}(t)\right) = \left[\frac{1}{x} = t\right] = \frac{1}{x}\left(\frac{1}{3} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x}\right)\right) \end{aligned}$$

vilket insatt i uttrycket från (1) ger

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^{1/2}}\left(1 - \frac{x^{1/3}}{(1+x)^{1/3}}\right)^{3/2} &= \frac{1}{x^{1/2}}\left(\frac{1}{x}\left(\frac{1}{3} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right)^{3/2} = \\ &= \frac{1}{x^{1/2}} \cdot \frac{1}{x^{3/2}}\left(\frac{1}{3} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{3/2} = \frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{3} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{3/2} \\ &\underbrace{\frac{1}{x^2}}_{=g_\infty(x)} \underbrace{\left(\frac{1}{3} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{3/2}}_{=h_\infty(x) \to (1/3)^{3/2} > 0 \text{ då } x \to \infty} . \end{aligned}$$

Då

$$\int_1^\infty g_\infty(x)\, dx = \int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$$

är konvergent så ger Sats 10.13 (Jämförelsesats II för generaliserade integraler), sid 458 i boken att även

$$\int_1^\infty \left(\frac{1}{x^{1/3}} - \frac{1}{(1+x)^{1/3}}\right)^{3/2} dx$$

är konvergent.
Då båda delintegralerna är konvergenta är även

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{x^{1/3}} - \frac{1}{(1+x)^{1/3}}\right)^{3/2} dx$$

konvergent.
Svar: Integralen är konvergent.

6. Vi börjar med att beräkna derivatorna av $y(x) = z(x)\sqrt{x}$ varefter vi sätter in resultaten i ekvationen.

$$
\begin{aligned}
&y(x) = z(x)\sqrt{x} \Rightarrow y' = z'\sqrt{x} + z\frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow \\
&y'' = z''\sqrt{x} + z'\frac{1}{2\sqrt{x}} + z'\frac{1}{2\sqrt{x}} - z\frac{1}{4x^{3/2}} = z''\sqrt{x} + z'\frac{1}{\sqrt{x}} - z\frac{1}{4x^{3/2}}, \\
&4(x^3 - x^2)y'' - 4xy' + (1+x)y = \\
&= 4x^2(x-1)\left(z''\sqrt{x} + z'\frac{1}{\sqrt{x}} - z\frac{1}{4x^{3/2}}\right) - 4x\left(z'\sqrt{x} + z\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) + (1+x)\sqrt{x}z = \\
&= \underline{\underline{4x^{5/2}(x-1)z'' + 4x^{3/2}(x-1)z'}} - x^{1/2}(x-1)z\underline{\underline{-4x^{3/2}z'}} - 2\sqrt{x}z + x^{3/2}z + \sqrt{x}z = \\
&= 4x^{3/2}\left(x(x-1)z'' + (x-1)z' - z'\right) + z(-x^{3/2} + \sqrt{x} - 2\sqrt{x} + x^{3/2} + \sqrt{x}) = \\
&= 4x^{3/2}\left(x(x-1)z'' + (x-2)z'\right) = 0 \iff x(x-1)z'' + (x-2)z' = 0 \iff \\
&\iff z'' + \frac{x-2}{x(x-1)}z' = 0,
\end{aligned}
$$

då $x > 1$ (enligt förutsättningarna. Observera att den sista ekvationen är en vanlig linjär första ordningens differentialekvation om vi ser z' som den sökta funktionen. Vi löser först denna på vanligt sätt med integrerande faktor för att sedan integrera resultatet. Vi får

$$
\begin{aligned}
&\int \frac{x-2}{x(x-1)}dx = \Big[\text{handpåläggning}\Big] = \int \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x-1}\right)dx \overset{x\geq 1}{=} 2\ln x - \ln(x-1) = \\
&\qquad = \ln\frac{x^2}{x-1} \Rightarrow I.F. = e^{\ln\frac{x^2}{x-1}} = \frac{x^2}{x-1} \Rightarrow D\left(\frac{x^2}{x-1}z'\right) = 0 \iff \\
&\qquad \iff \frac{x^2}{x-1}z' = A \iff z' = A\frac{x-1}{x^2} = \frac{A}{x} - \frac{A}{x^2} \iff \\
&\qquad \iff z = A\ln x + \frac{A}{x} + B \iff y = \sqrt{x}z = A\sqrt{x}\ln x + \frac{A}{\sqrt{x}} + B\sqrt{x}
\end{aligned}
$$

där A, B är godtyckliga reella konstanter.

Svar: $y = A\sqrt{x}\ln x + \dfrac{A}{\sqrt{x}} + B\sqrt{x}, \quad x > 1$ där A, B är godtyckliga reella konstanter.