

Lösningförslag till tentamen i Envariabelanalys 2, 2026-01-08 kl 08.00–13.00

1. (a) Bestäm maclaurinutvecklingen av f med hjälp av standardutvecklingarna. Vi chansar på att det räcker med restterm $\mathcal{O}(x^6)$. Vi får då

$$\begin{aligned}(\arctan x)^2 &= \left(x - \frac{1}{3}x^3 + \mathcal{O}(x^5)\right)^2 \\&= x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{1}{3}x^3 + 2 \cdot x \cdot \mathcal{O}(x^5) + \text{termer grad 6 och högre} = \\&= x^2 - \frac{2}{3}x^4 + \mathcal{O}(x^6), \\e^{x^2} &= [x^2 = t] = e^t = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \mathcal{O}(t^3) = [t = x^2] = \\&= 1 + x^2 + \frac{1}{2}x^4 + \mathcal{O}(x^6), \\(\arctan x)^2 - e^{x^2} &= x^2 - \frac{2}{3}x^4 + \mathcal{O}(x^6) - \left(1 + x^2 + \frac{1}{2}x^4 + \mathcal{O}(x^6)\right) = \\&= -1 - \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\right)x^4 + \mathcal{O}(x^6) = -1 - \frac{7}{6}x^4 + \mathcal{O}(x^6) = \\&= -1 + \underbrace{x^4 \left(-\frac{7}{6} + \mathcal{O}(x^2)\right)}_{\substack{<0 \text{ om } x \text{ nära } 0 \\ <0 \text{ om } x \neq 0 \text{ litet}}} < -1\end{aligned}$$

om $x \neq 0$ tillräckligt litet, d.v.s. f har ett lokalt maximum, -1 för $x = 0$.

- (b) Sätt $1/x = t$ så att $t \rightarrow 0^+$ då $x \rightarrow \infty$. Då är maclaurinutveckling en framkomlig väg och vi får

$$\begin{aligned}x^2 \sin \frac{1}{x} &= \frac{\sin t}{t^2} = \frac{1}{t^2} \left(t - \frac{1}{6}t^3 + \mathcal{O}(t^5)\right) = \frac{1}{t} - \frac{1}{6}t + \mathcal{O}(t^3), \\ \sqrt{x^2 + 1} &= \frac{1}{t} \sqrt{1 + t^2} = \frac{1}{t} \left(1 + \frac{1}{2}t^2 + \mathcal{O}(t^4)\right) = \frac{1}{t} + \frac{1}{2}t + \mathcal{O}(t^3), \\ \frac{\sin t}{t^2} - \frac{1}{t} \sqrt{1 + t^2} &= \frac{1}{t} - \frac{1}{6}t + \mathcal{O}(t^3) - \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{2}t + \mathcal{O}(t^3)\right) = \\&= -\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{2}\right)t + \mathcal{O}(t^3) = -\frac{2}{3}t + \mathcal{O}(t^3) \rightarrow 0\end{aligned}$$

då $t = \frac{1}{x} \rightarrow 0^+$.

- (c) Då vi skall ha restterm $\mathcal{O}(x^4)$ utvecklar vi täljare och nämnare till restterm

$\mathcal{O}(x^4)$. Vi får

$$\begin{aligned}\ln(1+x) &= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \mathcal{O}(x^4), \\ \frac{1}{\cos x} &= \left(1 - \left(\frac{1}{2}x^2 + \mathcal{O}(x^4)\right)\right)^{-1} = \left[\begin{array}{l} \text{tänk } t = \frac{1}{2}x^2 + \mathcal{O}(x^4) \text{ och} \\ \text{utveckla } (1-t)^{-1} = 1+t+\mathcal{O}(t^2) \end{array} \right] = \\ &= 1 + \frac{1}{2}x^2 + \mathcal{O}(x^4) + \mathcal{O}\left(\left(\frac{1}{2}x^2 + \mathcal{O}(x^4)\right)^2\right) = \\ &= 1 + \frac{1}{2}x^2 + \mathcal{O}(x^4), \\ \frac{\ln(1+x)}{\cos x} &= \left(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \mathcal{O}(x^4)\right) \left(1 + \frac{1}{2}x^2 + \mathcal{O}(x^4)\right) = \\ &= \left(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3\right) \cdot 1 + x \cdot \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^4) = \\ &= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{6}x^3 + \mathcal{O}(x^4).\end{aligned}$$

Alternativ: Ansätt $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{\cos x} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \mathcal{O}(x^4)$. Då $f(0) = 0 = a_0$ fås om vi multiplicerar upp $\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \mathcal{O}(x^4)$ att

$$\begin{aligned}\ln(1+x) &= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \mathcal{O}(x^4) = \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \mathcal{O}(x^4)\right) (a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \mathcal{O}(x^4)) = \\ &= a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 - \frac{1}{2}x^2 \cdot a_1x + \mathcal{O}(x^4) = \\ &= a_1x + a_2x^2 + \left(a_3 - \frac{a_1}{2}\right)x^3 + \mathcal{O}(x^4).\end{aligned}$$

Entydighetssatsen ger då

$$\begin{aligned}a_1 &= 1, & a_2 &= -\frac{1}{2}, \\ a_3 - \frac{a_1}{2} &= a_3 - \frac{1}{2} = \frac{1}{3} \iff a_3 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}\end{aligned}$$

vilket förstås är samma resultat som ovan.

Svar: (a) lokalt max., (b) 0, (c) $\frac{\ln(1+x)}{\cos x} = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{6}x^3 + \mathcal{O}(x^4)$.

2. Karakteristiska polynomet $P(r) = r^3 + r^2 + 3r - 5$ har nollstället $r = 1$. Poly-

nomdivision av $P(r)$ med $r - 1$ ger då

$$\begin{array}{r} r^2 + 2r + 5 \\ r^3 + r^2 + 3r - 5 \overline{) r - 1} \\ r^3 - r^2 \\ \hline 2r^2 + 3r \\ 2r^2 - 2r \\ \hline 5r - 5 \\ 5r - 5 \\ \hline 0 \end{array} \implies$$

$$\begin{aligned} \implies P(r) &= (r - 1)(r^2 + 2r + 5) = (r - 1)((r + 1)^2 + 4) = 0 \iff \\ &\iff r = 1, -1 \pm 2i \implies y_h = C_1 e^x + e^{-x} (C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x). \end{aligned}$$

Vi delar upp partikulärlösningen i två delar så att $y_p = y_{p1} + y_{p2}$ där $P(D)y_{p1} = e^{-x}$ och $P(D)y_{p2} = -20 \sin x$ genom att ansätta $y_{p1} = K e^{-x}$ och $y_{p2} = A \cos x + B \sin x$. Vi får

$$\begin{aligned} \underline{\underline{y_{p1}}}: \quad y'_{p1} &= -K e^{-x}, \quad y''_{p1} = K e^{-x}, \quad y'''_{p1} = -K e^{-x} \\ y'''_{p1} + y''_{p1} + 3y'_{p1} - 5y_{p1} &= (-K + K - 3K - 5K)e^{-x} = -8K e^{-x} = e^{-x} \iff \\ \iff K &= -\frac{1}{8}, \quad y_{p1} = -\frac{1}{8} e^{-x}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{\underline{y_{p2}}}: \quad y'_{p2} &= -A \sin x + B \cos x, \quad y''_{p2} = -A \cos x - B \sin x, \quad y'''_{p2} = A \sin x - B \cos x, \\ y'''_{p2} + y''_{p2} + 3y'_{p2} - 5y_{p2} &= \cos x(-B - A + 3B - 5A) + \sin x(A - B - 3A - 5B) = \\ &= (-6A + 2B) \cos x + (-2A - 6B) \sin x = 0 \cdot \cos x - 20 \sin x \iff \\ \iff \begin{cases} -6A + 2B &= 0 \\ -2A - 6B &= -20 \end{cases} &\iff \begin{cases} B &= 3A \\ -2A - 18A &= -20 \end{cases} \iff \\ \iff \begin{cases} B &= 3 \\ A &= 1 \end{cases}, \quad y_{p2} &= \cos x + 3 \sin x, \end{aligned}$$

$$y = y_h + y_{p1} + y_{p2} = C_1 e^x + e^{-x} (C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x) - \frac{1}{8} e^{-x} + \cos x + 3 \sin x$$

Svar: $y = C_1 e^x + e^{-x} (C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x - \frac{1}{8}) + \cos x + 3 \sin x$

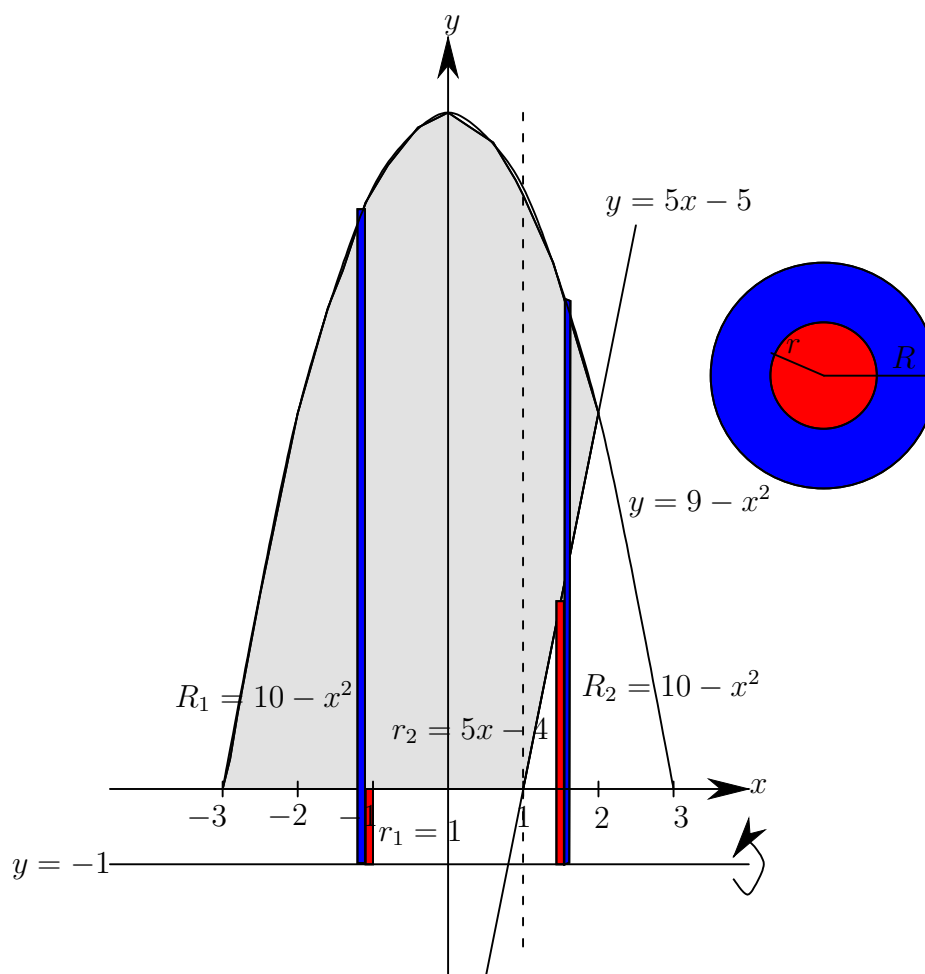
3. (a) Enklast att använda Sats 10.7 (Jämförelsesats II för positiva serier, jämförelse på gränsvärdesform, jämförelse på kvotform). Låt

$$a_k = \frac{\sin(1/k^2)}{\cos(1/k)} = \underbrace{\frac{1}{k^2} \cdot \frac{\sin(1/k^2)}{1/k^2} \cdot \frac{1}{\cos(1/k)}}_{=c_k}$$

Ser direkt att $c_k \rightarrow 1$ då $k \rightarrow \infty$. Då $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ är konvergent ger ovannämnda sats att vår ursprungliga serie är konvergent.

$$\begin{aligned} |I| &= \left| \int_0^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x+x^3}} dx \right| = \left| \int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{x+x^3}} dx + \int_1^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x+x^3}} dx \right| \leq \\ &\leq \underbrace{\left| \int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{x+x^3}} dx \right|}_{\geq 0} + \underbrace{\left| \int_1^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x+x^3}} dx \right|}_{\text{växlar tecken}} \leq \\ &\leq \int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{x+x^3}} dx + \int_1^\infty \frac{|\sin x|}{\sqrt{x+x^3}} dx \leq \\ &\leq \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx + \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x^3}} dx = \left[2\sqrt{x} \right]_0^1 + \left[-2x^{-1/2} \right]_1^\infty = 2 + 2 = 4.VSB. \end{aligned}$$
$$\int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{x+x^3}} dx \leq \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x}} dx = \int_0^1 \sqrt{x} dx = \left[\frac{2}{3} x^{3/2} \right]_0^1 = \frac{2}{3}.$$

4. (a) Vi börjar med figuren.



Ur figuren ovan ser vi att vi måste dela upp området i två delar för $-3 \leq x \leq 1$ respektive $1 \leq x \leq 2$. Vi använder skivformeln för båda och får volymselementen

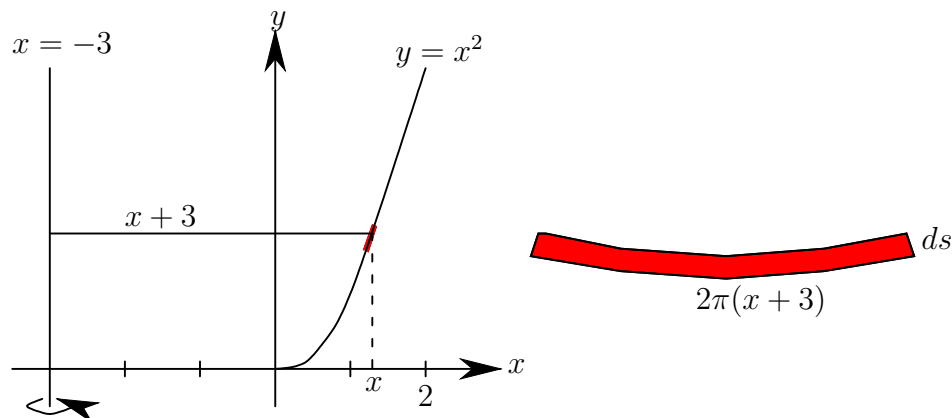
$$\begin{aligned} \underline{-3 \leq x \leq 1}: \quad R_1 &= 9 - x^2 - (-1) = 10 - x^2, \quad r_1 = 1, \\ dV_1 &= \pi(R_1^2 - r_1^2)dx = \pi\left((10 - x^2)^2 - 1\right)dx, \\ \underline{1 \leq x \leq 2}: \quad R_2 &= R_1 = 10 - x^2, \quad r_2 = 5x - 5 - (-1) = 5x - 4, \\ dV_2 &= \pi(R_2^2 - r_2^2)dx = \pi\left((10 - x^2)^2 - (5x - 4)^2\right)dx. \end{aligned}$$

Integration och summering ger

$$\begin{aligned} V &= \int dV_1 + \int dV_2 = \\ &= \pi \int_{-3}^1 \left((10 - x^2)^2 - 1\right)dx + \pi \int_1^2 \left((10 - x^2)^2 - (5x - 4)^2\right)dx = \\ &= \pi \int_{-3}^2 (10 - x^2)^2 dx - 4\pi - \pi \int_1^2 (5x - 4)^2 dx. \end{aligned}$$

Då integralen inte skall beräknas finns det flera godtygbara sätt att skriva integranden.

- (b) Arealelementet för beräkning av rotationsytans area är detsamma oavsett vilken axel vi roterar kring, $dA = 2\pi \cdot l \cdot ds$. Rita figur.



Med $y = x^2$ fås

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{1 + (y')^2} dx = \sqrt{1 + (2x)^2} dx = \sqrt{1 + 4x^2} dx, \\ dA &= 2\pi(x+3)\sqrt{1 + 4x^2} dx, \quad 0 \leq x \leq 2 \\ A &= \int dA = 2\pi \int_0^2 (x+3)\sqrt{1 + 4x^2} dx. \end{aligned}$$

- Svar:** (a) $V = \pi \int_{-3}^1 \left((10 - x^2)^2 - 1\right) dx + \pi \int_1^2 \left((10 - x^2)^2 - (5x - 4)^2\right) dx$,
 (b) $A = 2\pi \int_0^2 (x+3)\sqrt{1 + 4x^2} dx$.

5. Maclaurinutveckla $\cos t$ med retterm i Lagranges form och ersätt därefter t med x^2 .

$$\begin{aligned} f(t) &= \cos t, \quad f''(t) = -\cos t, \quad f^{(2n)}(t) = (-1)^n \cos t, \dots, f^{(2n+2)}(t) = (-1)^{n+1} \cos t, \\ f(t) &= 1 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{4!}t^4 + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}t^{2n} + \frac{(-1)^{n+1} \cos \xi}{(2n+2)!}t^{2n+2} = [t = x^2] = \\ &= 1 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{4!}x^8 + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{4n} + \frac{(-1)^{n+1} \cos \xi}{(2n+2)!}x^{4n+4} \end{aligned}$$

för något ξ mellan 0 och $t = x^2$. Frågan är hur långt vi skall utveckla. Vi chansar med $n = 2$, dvs

$$\begin{aligned} x \cos x^2 &= x \left(1 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{4!}x^8 - \frac{\cos \xi}{6!}x^{12} \right) = x - \underbrace{\frac{1}{2}x^5 + \frac{1}{4!}x^9}_{p(x)} - \frac{\cos \xi}{6!}x^{13} \implies \\ \implies |x \cos x^2 - p(x)| &= \left| \frac{\cos \xi}{6!}x^{13} \right| = \frac{|\cos \xi|}{6!}|x|^{13} \leq \frac{1}{6!}|x|^{13} \leq \frac{1}{6! \cdot 2^{13}} \leq 10^{-6} \iff \\ \iff 720 \cdot 2^{13} &= 1440 \cdot 2^{10} \cdot 4 > 1000 \cdot 1024 \cdot 4 > 10^6 \end{aligned}$$

för alla x : $|x| \leq 1/2$.

Alternativ: Kör på med godtyckligt n och välj på slutet istället

$$\begin{aligned} x \cos x^2 &= x - \frac{1}{2}x^5 + \frac{1}{4!}x^9 + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{4n+1} + \frac{(-1)^{n+1} \cos \xi}{(2n+2)!}x^{4n+5} \implies \\ &\underbrace{\phantom{x - \frac{1}{2}x^5 + \frac{1}{4!}x^9 + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{4n+1}}}_{p(x)} \\ \implies |x \cos x^2 - p(x)| &= \left| \frac{(-1)^{n+1} \cos \xi}{(2n+2)!}x^{4n+5} \right| = \frac{|\cos \xi|}{(2n+2)!}|x|^{4n+5} \leq \\ &\leq \frac{1}{(2n+2)! \cdot 2^{4n+5}} \end{aligned}$$

för alla x : $|x| \leq 1/2$.

Välj nu n så att felet blir mindre än 10^{-6} , d.v.s. $(2n+2)! \cdot 2^{4n+5} \geq 10^6$. Prova.

$$\begin{aligned} \underline{\underline{n=1}}: \quad (2+2)! \cdot 2^{4+5} &= 4! \cdot 2^9 = 24 \cdot 512 = 12 \cdot 1024 < 10^6 \quad \text{för litet,} \\ \underline{\underline{n=2}}: \quad (4+2)! \cdot 2^{8+5} &= 6! \cdot 2^{13} = 720 \cdot 8 \cdot 2^{10} < 5000 \cdot 1024 > 10^6 \quad \text{duger} \implies \\ \implies p(x) &= x - \frac{1}{2}x^5 + \frac{1}{4!}x^9 \end{aligned}$$

har den sökta egenskapen.

Svar: $p(x) = x - \frac{1}{2}x^5 + \frac{1}{24}x^9$

6. Gör så som föreslagits i ledningen, d.v.s. sätt $z(x) = y(x)/x \iff y(x) = x \cdot z(x)$. Då fås

$$\begin{aligned} z(-e^\pi) &= \frac{y(-e^\pi)}{-e^\pi} = \frac{e^\pi}{-e^\pi} = -1, \\ y'(x) &= D(x \cdot z(x)) = \underline{z + x \cdot z'} = 1 + \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^2} = \underline{1 + z + z^2} \iff \\ \iff x \cdot z' &= 1 + z^2 \iff \frac{z'}{1 + z^2} = \frac{1}{x}, \quad x \neq 0 \end{aligned}$$

vilket är en separabel ekvation. Lös på vanligt sätt. Vi får

$$\int \frac{dz}{z^2 + 1} = \arctan z = \ln |x| + C.$$

Utnyttja bivillkoret och bestäm C .

$$\arctan(z(-e^\pi)) = \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4} = \ln |-e^\pi| + C = \ln e^\pi + C = \pi + C \iff$$

$$C = -\frac{5\pi}{4}$$

vilket ger

$$\begin{aligned} \arctan z = \ln |x| - \frac{5\pi}{4} &\iff z = \frac{y}{x} = \tan\left(\ln |x| - \frac{5\pi}{4}\right) \iff \\ &\iff y = x \tan\left(\ln |x| - \frac{5\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

där x är sådant att $\ln |x| - \frac{5\pi}{4} \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$. Eftersom lösningen skall vara definierad på ett intervall som innehåller $x = -e^\pi$ och

$$\ln |-e^\pi| - \frac{5\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

fås maximalt definitionsintervall ur olikheterna

$$-\frac{\pi}{2} < \ln |x| - \frac{5\pi}{4} < \frac{\pi}{2} \iff \frac{3\pi}{4} < \ln |x| < \frac{7\pi}{4} \iff e^{3\pi/4} < |x| < e^{7\pi/4}.$$

Eftersom $x = -e^\pi < 0$ följer $|x| = -x$ så att

$$e^{3\pi/4} < |x| = -x < e^{7\pi/4} \iff -e^{7\pi/4} < x < -e^{3\pi/4}.$$

Svar: $y = x \tan\left(\ln |x| - \frac{5\pi}{4}\right)$, $-e^{7\pi/4} < x < -e^{3\pi/4}$