TATA42 Envariabelanalys 2 2026-03-20, lösningsförslag

1. (a) Vi får successivt $f(x) = e^x$, $f'(x) = e^x$, $\ldots$, $f^{(4)}(x) = e^x$, $f^{(5)}(x) = e^x$, och därmed värdena $f(0) = 1$, $f'(0) = 1$, $\ldots$, $f^{(4)}(0) = 1$, $f^{(5)}(\xi) = e^{\xi}$, så

$$\begin{aligned} e^x = f(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}x^5 \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{e^{\xi}x^5}{120} \end{aligned}$$

för något $\xi = \xi(x)$ mellan 0 och x. Med $x = -1$ får vi sedan

$$\underbrace{\frac{1}{e}}_{\text{Exakt}} = e^{-1} = f(-1) = 1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} - \frac{e^{\xi}}{120} = \underbrace{\frac{3}{8}}_{\text{Approx.}} \underbrace{- \frac{e^{\xi}}{120}}_{\text{Approx.fel}}$$

för något ξ mellan 0 och -1 (d.v.s. $-1 \le \xi \le 0$), där approximationsfelets belopp är

$$\left|\frac{1}{e} - \frac{3}{8}\right| = \left|-\frac{e^{\xi}}{120}\right| = \frac{e^{\xi}}{120} \le \frac{e^0}{120} = \frac{1}{120} \le \frac{1}{100},$$

vilket är tillräckligt litet.

(b) Standardutvecklingar ger

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(1 + \arctan x) = \ln\big(1 + x - x^3/3 + \mathcal{O}(x^5)\big) = \Big/ \begin{array}{c} t = x - x^3/3 + \mathcal{O}(x^5), \\ x \to 0 \;\Rightarrow\; t \to 0 \end{array} \Big/ \\ &= \ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \mathcal{O}(t^5) \\ &= \Big/ \begin{array}{c} t^2 = t \cdot t = \big(x - x^3/3 + \mathcal{O}(x^5)\big)\big(x - x^3/3 + \mathcal{O}(x^5)\big) = x^2 - 2x^4/3 + \mathcal{O}(x^6), \\ t^3 = t^2 \cdot t = \big(x^2 + \mathcal{O}(x^4)\big)\big(x + \mathcal{O}(x^3)\big) = x^3 + \mathcal{O}(x^5), \\ t^4 = t^3 \cdot t = \big(x^3 + \mathcal{O}(x^5)\big)\big(x + \mathcal{O}(x^3)\big) = x^4 + \mathcal{O}(x^6), \quad \mathcal{O}(t^5) = \mathcal{O}(x^5) \end{array} \Big/ \\ &= \big(x - x^3/3 + \mathcal{O}(x^5)\big) - \frac{x^2 - 2x^4/3 + \mathcal{O}(x^6)}{2} + \frac{x^3 + \mathcal{O}(x^5)}{3} - \frac{x^4 + \mathcal{O}(x^6)}{4} + \mathcal{O}(x^5) \\ &= \underline{\underline{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{12} + \mathcal{O}(x^5)}} \quad = \quad \underline{\text{Svar}}. \end{aligned}$$

2. (a) Eftersom $x > 0$ är

$$xy' - y = x^2e^x \Leftrightarrow y' - \frac{y}{x} = x\,e^x \overset{*}{\Leftrightarrow} \frac{y'}{x} - \frac{y}{x^2} = e^x \Leftrightarrow \left(\frac{y}{x}\right)' = e^x \Leftrightarrow \frac{y}{x} = e^x + C,$$

där vi i steg $*$ har använt den integrerande faktorn $\exp(-\ln x) = 1/x$. Bivillkoret $y(1) = 0$ ger $0/1 = e^1 + C$, d.v.s. $C = -e$, och löser vi ut y får vi

<u>Svar</u>: $y = x\,e^x - ex$.

(b) Eftersom $1 + y^2 > 0$ får vi

$$y' - 2xy^2 = 2x \Leftrightarrow y' = 2x(1+y^2) \Leftrightarrow \frac{y'}{1+y^2} = 2x \Leftrightarrow \int \frac{dy}{1+y^2} = \int 2x\,dx \Leftrightarrow \arctan y = x^2 + C.$$

Bivillkoret $y(0) = 1$ ger $\pi/4 = 0 + C$, d.v.s. $C = \pi/4$, och

$$\arctan y = x^2 + \frac{\pi}{4} \quad \Leftrightarrow \quad y = \tan\left(x^2 + \frac{\pi}{4}\right), \; -\frac{\pi}{2} < x^2 + \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}.$$

Här är den vänstra olikheten automatiskt uppfylld medan den högra är uppfylld precis då $x^2 < \pi/4$, d.v.s. precis då $|x| < \sqrt{\pi}/2$, och detta intervall innehåller punkten $x = 0$ och är därmed det största öppna intervall där $y(x)$ är en lösning till problemet.

<u>Svar</u>: $y(x) = \tan\left(x^2 + \frac{\pi}{4}\right)$, $|x| < \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

3. (a) Sätt $a_k = \dfrac{4^k+5^k}{7^k-6^k}x^k$ för fixt x. Eftersom

$$\sqrt[k]{|a_k|} = \sqrt[k]{\frac{5^k\big((4/5)^k+1\big)}{7^k\big(1-(6/7)^k\big)}|x|^k} = \sqrt[k]{\frac{(4/5)^k+1}{1-(6/7)^k}}\cdot\frac{5|x|}{7} \to \frac{5|x|}{7} = Q$$

då $k\to\infty$ medför rotkriteriet att serien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ är absolutkonvergent då $Q<1$, d.v.s. då $|x|<7/5$, och divergent då $Q>1$, d.v.s. då $|x|>7/5$; alltså är den givna potensseriens konvergensradie $R=7/5$.

Svar: $R=7/5$.

(b) Eftersom $-1\le \sin x\le 1$ och $e^{-x}>0$ för alla x får vi olikheterna

$$0\le \frac{x-\sin x}{e^{-x}+x^5} \le \frac{x+1}{0+x^5} = \frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^5} \qquad \text{då } x>1,$$

vilket medför att

$$0\le \int_1^{\infty}\frac{x-\sin x}{e^{-x}+x^5}\,dx \le \int_1^{\infty}\left(\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^5}\right)dx = \left[\frac{x^{-3}}{-3}+\frac{x^{-4}}{-4}\right]_1^{x\to\infty} = \frac{1}{3}+\frac{1}{4} = \frac{7}{12},$$

vilket skulle bevisas.

(c) Vi söker det typiska beteendet för stora k. Förlängning med konjugatuttrycket och en logaritmlag ger

$$0\le a_k = \left(\sqrt{k+2}-\sqrt{k}\right)\left(\ln(k+2)-\ln k\right) = \frac{2}{\sqrt{k+2}+\sqrt{k}}\cdot\ln(1+2/k)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{k}}\cdot\frac{2}{\sqrt{1+2/k}+1}\cdot\frac{\ln(1+2/k)}{2/k}\cdot\frac{2}{k} = \frac{1}{k^{3/2}}\cdot\frac{4}{\sqrt{1+2/k}+1}\cdot\frac{\ln(1+2/k)}{2/k}.$$

Sätt $b_k = 1/k^{3/2}$. Eftersom $\big(\ln(1+t)\big)/t\to 1$ då $t\to 0$ får vi att

- $\dfrac{a_k}{b_k} = \dfrac{4}{\sqrt{1+2/k}+1}\cdot\dfrac{\ln(1+2/k)}{2/k} \to \dfrac{4}{1+1}\cdot 1 = 2 = A$ då $k\to\infty$, där $0<A<\infty$,
- $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{3/2}}$ är konvergent (standardserie: $\alpha = 3/2>1$).

Jämförelsekriteriet på kvotform medför därför att även vår ursprungliga serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ är konvergent.

Svar: Serien är konvergent.

4. (a) När området ges av $0\le r\le R(\varphi)$ är areaelementet $dA(\varphi) = \big(R(\varphi)^2/2\big)d\varphi$, så arean A av D blir

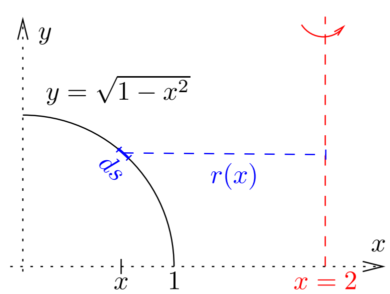
$$A = \int_0^{\pi/2}\frac{\left(\sqrt{\varphi}\right)^2}{2}\,d\varphi = \int_0^{\pi/2}\frac{\varphi}{2}\,d\varphi = \left[\frac{\varphi^2}{4}\right]_0^{\pi/2} = \underline{\underline{\frac{\pi^2}{16}}}.$$

(b) Bågelementet ds vid x (se figur) är, för växande x,

$$ds = \sqrt{(dx)^2+(dy)^2} = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = \sqrt{1+\left(-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2}\,dx = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = ds(x).$$

Det smala och sneda cirkulära band som uppkommer när den lilla kurvbiten med längd $ds(x)$ vid x roteras ett varv kring linjen $x=2$ har radie $r(x)=2-x$ och bredd $ds(x)$, så dess area är

$$dA(x) = 2\pi r(x)\,ds(x) = \frac{2\pi(2-x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$



Rotationsytans totala area A blir därför (notera att $\left(\sqrt{1-x^2}\right)' = -x/\sqrt{1-x^2}$ enligt ovan)

$$A = \int_0^1 dA(x) = \int_0^1\frac{2\pi(2-x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = 2\pi\left[2\arcsin x+\sqrt{1-x^2}\right]_0^1 = \underline{\underline{2\pi^2-2\pi}}.$$

(*Alternativ:* Uppgiften kan också lösas med polära koordinater. Kurvan är kvartscirkeln $r=1$, $0\le\varphi\le\pi/2$, bågelementet $ds(\varphi) = \sqrt{r(\varphi)^2+r'(\varphi)^2}\,d\varphi = d\varphi$ och areaelementet $dA(\varphi) = 2\pi(2-\cos\varphi)\,ds(\varphi) = 2\pi(2-\cos\varphi)\,d\varphi$, så $A = 2\pi\big[2\varphi-\sin\varphi\big]_0^{\pi/2} = 2\pi^2-2\pi$.)

5. Standardutvecklingarna

$$\cos x = 1 + \mathcal{O}(x^2),$$

$$\sin x = x + \mathcal{O}(x^3)$$

och

$$(1+t)^\alpha = 1 + \alpha t + \binom{\alpha}{2} t^2 + \mathcal{O}(t^3) = 1 + \alpha t + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1\cdot 2}\, t^2 + \mathcal{O}(t^3)$$

med $\alpha = 1/2$ och $t = bx$ respektive $\alpha = 1/3$ och $t = x$ ger nämnaren

$$\begin{aligned}\sqrt{1+bx} - \sqrt[3]{1+x} &= (1+bx)^{1/2} - (1+x)^{1/3} \\ &= \left(1 + \frac{bx}{2} + \frac{(1/2)(-1/2)}{1\cdot 2}(bx)^2 + \mathcal{O}(x^3)\right) - \left(1 + \frac{x}{3} + \frac{(1/3)(-2/3)}{1\cdot 2}\, x^2 + \mathcal{O}(x^3)\right) \\ &= \left(\frac{b}{2} - \frac{1}{3}\right) x + \left(\frac{1}{9} - \frac{b^2}{8}\right) x^2 + \mathcal{O}(x^3)\end{aligned}$$

och täljaren

$$\begin{aligned}ax + x^2 - x\cos x - \sin x &= ax + x^2 - x\big(1 + \mathcal{O}(x^2)\big) - \big(x + \mathcal{O}(x^3)\big) \\ &= (a-2)x + x^2 + \mathcal{O}(x^3).\end{aligned}$$

Vi får två fall beroende på om förstagradstermen i nämnaren försvinner eller inte:

- Om $b/2 - 1/3 \neq 0$, d.v.s. om $b \neq 2/3$, får vi att kvoten efter förkortning med x blir

$$\frac{(a-2) + \mathcal{O}(x)}{(b/2 - 1/3) + \mathcal{O}(x)} \to \frac{(a-2)+0}{(b/2-1/3)+0} = \frac{6a-12}{3b-2} \quad \text{då } x \to 0.$$

- Om $b/2 - 1/3 = 0$, d.v.s. om $b = 2/3$, får vi att kvoten efter förkortning med x^2 blir

$$\frac{(a-2)/x + 1 + \mathcal{O}(x)}{1/18 + \mathcal{O}(x)}$$

  som blir obegränsat då $x \to 0$ om $a \neq 2$ men har gränsvärdet 18 då $x \to 0$ om $a = 2$.

Svar: Gränsvärdet är $\begin{cases} \dfrac{6a-12}{3b-2} & \text{för alla } (a,b) \text{ där } b \neq 2/3, \\ 18 & \text{då } (a,b) = (2, 2/3). \end{cases}$

I övriga fall, d.v.s. då $a \neq 2$ och $b = 2/3$, saknas ändligt gränsvärde (”ändligt” kan faktiskt strykas här, varför?).

6. Ansätt

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + ..., \quad |x| < R,$$

där konvergensradien R ännu är okänd; bivillkoret $y(0) = 1$ ger $c_0 = 1$. Derivering ger

$$y' = \sum_{k=0}^{\infty} k c_k x^{k-1} = 0 + c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + ..., \quad |x| < R;$$

bivillkoret $y'(0) = 1$ ger $c_1 = 1$. Derivering ännu en gång ger

$$y'' = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)c_k x^{k-2} = \sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+1)c_{k+2}x^k = 2 \cdot 1 \cdot c_2 + 3 \cdot 2 \cdot c_3 x + \dots, \quad |x| < R$$

(notera att termerna med nummer 0 och 1 i den vänstra serien är noll, så den kunde lika gärna ha börjat med $k = 2$). Insättning i differentialekvationens vänsterled ger

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + 12y = \sum_{k=0}^{\infty}\big((k+2)(k+1)c_{k+2} - k(k-1)c_k - 2kc_k + 12c_k\big)x^k, \quad |x| < R.$$

Detta uttryck ska vara lika med noll då $|x| < R$, och entydighet hos koefficienterna ger därför att

$$(k+2)(k+1)c_{k+2} - k(k-1)c_k - 2kc_k + 12c_k = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

d.v.s.

$$c_{k+2} = \frac{k^2 + k - 12}{(k+2)(k+1)}c_k = \frac{(k+4)(k-3)}{(k+2)(k+1)}c_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

den s.k. rekursionsformeln.

$c_0 = 1$ ger successivt $c_2 = -6c_0 = -6$, $c_4 = -c_2/2 = 3$ och $c_6 = 4c_4/15 = 4/5$.

$c_1 = 1$ ger successivt $c_3 = -5c_1/3 = -5/3$ och $c_5 = 0$, och därmed är alla efterföljande c_k med udda nummer också lika med noll.

Således kan potensserien för y skrivas (notera att det alltså bara finns två nollskilda termer med udda gradtal)

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = 1 + x - 6x^2 - \frac{5x^3}{3} + 3x^4 + \frac{4x^6}{5} + \sum_{n=4}^{\infty} c_{2n}x^{2n}, \quad |x| < R,$$

där konvergensradien R nu kan bestämmas med kvotkriteriet: Sätt $a_n = c_{2n}x^{2n}$ för fixt $x \neq 0$. Då blir, med hjälp av rekursionsformeln ovan,

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{c_{2n+2}}{c_{2n}}\right| |x|^2 = \left|\frac{(2n+4)(2n-3)}{(2n+2)(2n+1)}\right| |x|^2 = \left|\frac{(2+4/n)(2-3/n)}{(2+2/n)(2+1/n)}\right| |x|^2 \to |x|^2 = Q$$

då $k \to \infty$, så potensserien är absolutkonvergent då $Q < 1$, d.v.s. då $|x| < 1$, men divergent då $Q > 1$, d.v.s. då $|x| > 1$; alltså är potensseriens konvergensradie $R = 1$.

Svar: $c_0 = 1$, $c_1 = 1$, $c_2 = -6$, $c_3 = -5/3$, $c_4 = 3$, $c_5 = 0$, $c_6 = 4/5$, $c_7 = 0$.

Rekursionsformeln: $c_{k+2} = \dfrac{k^2 + k - 12}{(k+2)(k+1)}c_k = \dfrac{(k+4)(k-3)}{(k+2)(k+1)}c_k$, $k = 0, 1, 2, \dots$

Konvergensradien $R = 1$.