TATA42 Envariabelanalys 2 exempeltenta 1, lösningsförslag

1. (a) Nämnaren $= x - \arctan x = x - (x - x^3/3 + \mathcal{O}(x^5)) = x^3/3 + \mathcal{O}(x^5)$, så vi utvecklar täljaren t.o.m. grad 3. Standardutvecklingen $(1+t)^{1/3} = 1 + t/3 + \mathcal{O}(t^2)$ med $t = x^3$ (observera att $x \to 0 \Rightarrow t \to 0$) ger täljaren $= \sqrt[3]{1+x^3} - 1 = x^3/3 + \mathcal{O}(x^6)$, så

$$\frac{\sqrt[3]{1+x^3}-1}{x-\arctan x} = \frac{x^3/3+\mathcal{O}(x^6)}{x^3/3+\mathcal{O}(x^5)} = \frac{1/3+\mathcal{O}(x^3)}{1/3+\mathcal{O}(x^2)} \to \frac{1/3+0}{1/3+0} = 1 \quad \text{då } x \to 0.$$

<u>Svar</u>: 1.

(b) Vi får successivt

$$f(x) = \sin x,\ f'(x) = \cos x,\ f''(x) = -\sin x,\ f'''(x) = -\cos x,\ f^{(4)}(x) = \sin x,\ f^{(5)}(x) = \cos x,$$

så

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 1, \quad f''(0) = 0, \quad f'''(0) = -1, \quad f^{(4)}(0) = 0, \quad f^{(5)}(\xi) = \cos \xi,$$

varför

$$\begin{aligned} \sin x = f(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}x^5 \\ &= x - \frac{x^3}{6} + \frac{\cos\xi}{120}x^5 \end{aligned}$$

för något $\xi = \xi(x)$ mellan 0 och x. Med $x = 1/10$ får vi sedan

$$\sin\left(\frac{1}{10}\right) = \frac{1}{10} - \frac{(1/10)^3}{6} + \frac{\cos\xi}{120}\left(\frac{1}{10}\right)^5 = \frac{599}{6000} + \frac{\cos\xi}{120\cdot 10^5}$$

för något ξ mellan 0 och 1/10. Eftersom $|\cos\xi| \le 1$, oavsett var ξ finns, får vi slutligen

$$\left|\sin\left(\frac{1}{10}\right) - \frac{599}{6000}\right| = \left|\frac{\cos\xi}{120\cdot 10^5}\right| = \frac{|\cos\xi|}{120\cdot 10^5} \le \frac{1}{120\cdot 10^5} \le 10^{-7},$$

vilket skulle bevisas.

<u>Svar</u>: $\sin x = x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{\cos\xi}{120}x^5$ för något $\xi = \xi(x)$ mellan 0 och x.

2. (a) Eftersom $x > 0$ är

$$\begin{aligned} xy' - y = x^2e^{2x} \quad &\Leftrightarrow \quad y' - \frac{y}{x} = x\,e^{2x} \quad \overset{*}{\Leftrightarrow} \quad \frac{y'}{x} - \frac{y}{x^2} = e^{2x} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{y}{x}\right) = e^{2x} \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{y}{x} = \frac{e^{2x}}{2} + C, \text{ där } y(1) = 0 \text{ ger } \frac{0}{1} = \frac{e^2}{2} + C, \text{ d.v.s. } C = -\frac{e^2}{2}, \end{aligned}$$

och där steg $*$ följer av att en integrerande faktor är $e^{F(x)} = e^{-\ln x} = 1/x$, ty $F(x) = -\ln x$ är en primitiv till $f(x) = -1/x$ då $x > 0$; alltså blir $y = (e^{2x} - e^2)x/2$.

I denna uppgift ska vi endast svara med vår lösning, och kontrollera att den löser problemet; ovanstående räkningar ska alltså *inte* lämnas in. Däremot ska följande lämnas in:

<u>Svar</u>: $y = (e^{2x} - e^2)x/2$.

<u>Kontroll</u>: $xy' - y = x\big(e^{2x}x + (e^{2x} - e^2)/2\big) - (e^{2x} - e^2)x/2 = x^2e^{2x}$; $y(1) = (e^2 - e^2)/2 = 0$.

(b) Eftersom vi söker en lösning $y(x)$ med bivillkoret $y(0) = -1 \neq 0$ kan vi dividera med $y^3 \neq 0$:

$$y' - xy^3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y'}{y^3} = x \quad \Leftrightarrow \quad \int y^{-3}\,dy = \int x\,dx \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y^{-2}}{-2} = \frac{x^2}{2} + C.$$

Villkoret $y(0) = -1$ ger $-(-1)^2/2 = 0/2 + C$, d.v.s. $C = -1/2$, så

$$y^{-2} = 1 - x^2 \quad \Leftrightarrow \quad y = \binom{+}{-}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

där $-$ gäller, ty $y(0) = -1 < 0$.

Det största öppna intervall som innehåller $x = 0$ och där $y(x)$ är en lösning är alltså där $1 - x^2 > 0$, d.v.s. där $-1 < x < 1$.

<u>Svar</u>: $y = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $-1 < x < 1$.

3. (a) Sätt $a_k = (k+1)x^{2k}/\big(4^k(k+3)\big)$ för fixt $x \neq 0$. Eftersom

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{(k+2)|x|^{2(k+1)}}{4^{k+1}(k+4)} \Bigg/ \frac{(k+1)|x|^{2k}}{4^k(k+3)} = \frac{|x|^2}{4} \cdot \frac{(1+2/k)(1+3/k)}{(1+1/k)(1+4/k)} \to \frac{|x|^2}{4} = Q$$

då $k \to \infty$ medför kvotkriteriet att serien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ är absolutkonvergent då $Q < 1$, d.v.s. då $|x| < 2$, och divergent då $Q > 1$, d.v.s. då $|x| > 2$; alltså är konvergensradien $R = 2$.
För de återstående värdena $x = \pm 2$ får vi serien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$, där

$$a_k = \frac{k+1}{k+3} = \frac{1+1/k}{1+3/k} \to 1 \neq 0 \quad \text{då } k \to \infty,$$

så divergenstestet medför att serien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ är divergent för dessa x. <u>Svar</u>: $-2 < x < 2$.

(b) Integranden är positiv, och eftersom $x^2 + \sqrt{x}$ är större än både x^2 och $\sqrt{x}$ då $x > 0$ får vi att

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+\sqrt{x}} &= \int_0^1 \frac{dx}{x^2+\sqrt{x}} + \int_1^\infty \frac{dx}{x^2+\sqrt{x}} \\ &\leq \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} + \int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = \big[2\sqrt{x}\big]_0^1 + \left[-\frac{1}{x}\right]_1^\infty = 2 + 1 = 3,\end{aligned}$$

vilket skulle bevisas.

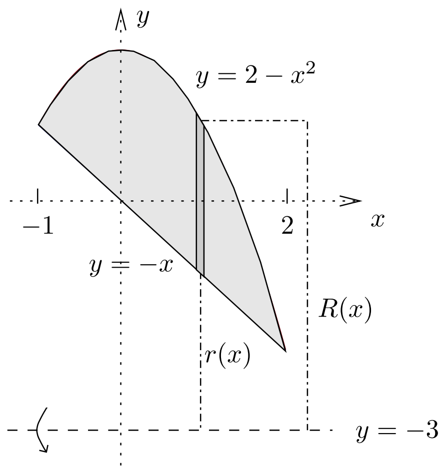
4. (a) För kurvan $y = x^2/2 + 3$, $1 \leq x \leq 2$ blir bågelementet (för växande x)

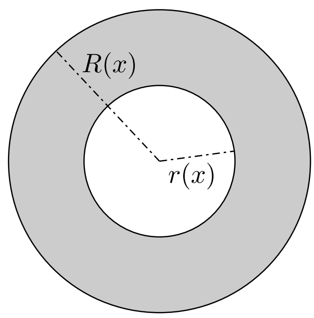
$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + (dy/dx)^2}\, dx = \sqrt{1+x^2}\, dx = ds(x),$$

så kurvlängden L blir

$$L = \int_1^2 ds(x) = \int_1^2 \sqrt{1+x^2}\, dx = \underline{\text{Svar}}.$$

(b)





Kurvorna skär där $2 - x^2 = -x$, d.v.s. där $x = -1$ eller $x = 2$, och området kan skrivas

$$-x \leq y \leq 2 - x^2, \quad -1 \leq x \leq 2.$$

När den mörkare tunna stapeln roterar ett varv kring linjen $y = -3$ genereras en cirkelring med ytterradie $R(x) = (2-x^2) - (-3) = 5 - x^2$, innerradie $r(x) = (-x) - (-3) = 3 - x$ och tjocklek dx; ringens volym blir därför

$$dV(x) = \big(\pi R(x)^2 - \pi r(x)^2\big)dx = \pi\big((5-x^2)^2 - (3-x)^2\big)dx = \pi(16 + 6x - 11x^2 + x^4)\, dx,$$

och hela rotationskroppens volym V blir

$$V = \int_{-1}^2 dV(x) = \int_{-1}^2 \pi(16+6x-11x^2+x^4)\, dx = \pi\left[16x + 3x^2 - \frac{11x^3}{3} + \frac{x^5}{5}\right]_{-1}^2 = \frac{153\pi}{5} = \underline{\text{Svar}}.$$

5. Vi utvecklar först ln-termen. Standardutvecklingen $\ln(1+t) = t - t^2/2 + t^3/3 - t^4/4 + \mathcal{O}(t^5)$ använd med $t = \sin x = x - x^3/6 + \mathcal{O}(x^5)$ (observera att $x \to 0 \Rightarrow t \to 0$) ger

$$t^2 = t \cdot t = x^2 - x^4/3 + \mathcal{O}(x^6);\ t^3 = t^2 \cdot t = x^3 + \mathcal{O}(x^5);\ t^4 = t^3 \cdot t = x^4 + \mathcal{O}(x^6);\ \mathcal{O}(t^5) = \mathcal{O}(x^5),$$

så

$$\begin{aligned}\ln(1+\sin x) &= \big(x - \frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^5)\big) - \frac{1}{2}\big(x^2 - \frac{x^4}{3} + \mathcal{O}(x^6)\big) + \frac{1}{3}\big(x^3 + \mathcal{O}(x^5)\big) - \frac{1}{4}\big(x^4 + \mathcal{O}(x^6)\big) + \mathcal{O}(x^5) \\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{12} + \mathcal{O}(x^5).\end{aligned}$$

Vidare, med $t = x^2$,

$$e^{x^2} = e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \mathcal{O}(t^3) = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \mathcal{O}(x^6),$$

och

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2} = 1 + \frac{x}{2} + \binom{1/2}{2}x^2 + \binom{1/2}{3}x^3 + \mathcal{O}(x^4) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + \mathcal{O}(x^4),$$

så

$$\begin{aligned}f(x) &= \ln(1+\sin x) + e^{x^2} - x\sqrt{1+x} \\ &= \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{12} + \mathcal{O}(x^5)\right) + \left(1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \mathcal{O}(x^6)\right) - \left(x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{8} + \frac{x^4}{16} + \mathcal{O}(x^5)\right) \\ &= 1 + \frac{7x^3}{24} + \frac{17x^4}{48} + \mathcal{O}(x^5) = 1 + x^3\left(\frac{7}{24} + \mathcal{O}(x)\right),\end{aligned}$$

där det sista uttrycket inom parentes, $7/24 + \mathcal{O}(x)$, är nära $7/24$ och därmed > 0 då x är nära 0. Vidare, $x^3 > 0$ då $x > 0$ men $x^3 < 0$ då $x < 0$, varför $f(x) < 1 = f(0)$ då $x < 0$ nära 0, medan $f(x) > 1 = f(0)$ då $x > 0$ nära 0. Alltså har f inget lokalt extremvärde i $x = 0$.

Slutligen, koefficienten för x^4 är $f^{(4)}(0)/4! = 17/48$, så $f^{(4)}(0) = 17/2$.

<u>Svar</u>: $f(x) = 1 + \dfrac{7x^3}{24} + \dfrac{17x^4}{48} + \mathcal{O}(x^5)$; f har inget lokalt extremvärde i $x = 0$; $f^{(4)}(0) = \dfrac{17}{2}$.

6. Eftersom $e^t = \sum_{k=0}^{\infty} t^k/k!$, $t \in \mathbb{R}$, får vi, med $t = -x^2$ och termvis integration i steg $*$ nedan, vilket är tillåtet eftersom exponentialfunktionens Maclaurinserie har oändlig konvergensradie,

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{k!}\right) dx \overset{*}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \int_0^1 x^{2k}\,dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \cdot (2k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k,$$

där

$$a_k = \frac{(-1)^k}{k! \cdot (2k+1)}.$$

Serien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ är alternerande och $|a_k| = 1/\big(k! \cdot (2k+1)\big) \searrow 0$ då $k \to \infty$ (*avtar* mot noll) eftersom $k! \cdot (2k+1) \nearrow \infty$ då $k \to \infty$ (*växer* mot oändligheten). Det följer att serien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ är en Leibnizserie, och därför gäller, om $s = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ är seriens summa och $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ är dess delsummor,

$$|s - s_n| \le |a_{n+1}|,$$

och prövning ger $|a_4| = 1/(24 \cdot 9) = 1/216$, för stort, medan $|a_5| = 1/(120 \cdot 11) \le 1/1000$. Alltså,

$$s \approx s_4 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \frac{1}{216}$$

med fel vars absolutbelopp är mindre än $1/1000$.

<u>Svar</u>: $a_k = \dfrac{(-1)^k}{k! \cdot (2k+1)}$, $k \in \mathbb{N}$; approximationen $1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{10} - \dfrac{1}{42} + \dfrac{1}{216}$ duger.