TATA42 ENVARIABELANALYS 2 EXEMPELTENTA 2, LÖSNINGSFÖRSLAG.

1a.

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(1+x); \quad f(0)=0, \\ f'(x) &= (1+x)^{-1}; \quad f'(0)=1, \\ f''(x) &= -(1+x)^{-2}; \quad f''(0)=-1, \\ f'''(x) &= 2(1+x)^{-3}; \quad f'''(0)=2, \\ f^{(4)}(x) &= -6(1+x)^{-4}. \end{aligned}$$

Detta ger

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}x^4 \\ &= x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4(1+\xi)^4} \text{ för något } \xi \text{ mellan 0 och } x. \end{aligned}$$

Svar: $\ln(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4(1+\xi)^4}$ för något ξ mellan 0 och x.

1b. Vi behöver standardutvecklingarna

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+\mathcal{O}(x^6), \quad e^t = 1+t+\frac{t^2}{2}+\mathcal{O}(t^3),$$

$$\text{och} \qquad \sqrt{1+s} = 1+\frac{1}{2}s+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2}s^2+\mathcal{O}(s^3) = 1+\frac{s}{2}-\frac{s^2}{8}+\mathcal{O}(s^3),$$

där vi på grund av nämnaren x^4 ser att vi behöver ha kontroll på x^4-termer i täljaren. Med hjälp av dessa utvecklingar kan vi uttrycka

$$\begin{aligned} \sqrt{\cos x} &= \sqrt{1\underbrace{-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+\mathcal{O}(x^6)}_{=s}} \\ &= 1+\frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+\mathcal{O}(x^6)\right)-\frac{1}{8}\left(-\frac{x^2}{2}+\mathcal{O}(x^4)\right)^2+\mathcal{O}\left(\mathcal{O}(x^2)^3\right) \\ &= 1-\frac{x^2}{4}-\frac{x^4}{96}+\mathcal{O}(x^6) \end{aligned}$$

och

$$e^{-x^2/4} = 1-\frac{x^2}{4}+\frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{4}\right)^2+\mathcal{O}(x^6) = 1-\frac{x^2}{4}+\frac{x^4}{32}+\mathcal{O}(x^6),$$

så

$$\frac{\sqrt{\cos x}-e^{-x^2/4}}{x^4} = \frac{-\frac{x^4}{96}-\frac{x^4}{32}+\mathcal{O}(x^6)}{x^4} = -\frac{1}{24}+\mathcal{O}(x^2) \to -\frac{1}{24}, \quad \text{då } x \to 0.$$

Svar: $-1/24$.

1c. Med standardutvecklingarna $\sin t = t+\mathcal{O}(t^3)$ och $\arctan x = x - x^3/3+\mathcal{O}(x^5)$ får vi

$$\begin{aligned} f(x) &= 2+x\sin(x^3)-x^3\arctan x = 2+x(x^3+\mathcal{O}(x^9))-x^3\left(x-\frac{x^3}{3}+\mathcal{O}(x^5)\right) \\ &= 2+\frac{x^6}{3}+\mathcal{O}(x^8) = 2+x^6\left(\frac{1}{3}+\mathcal{O}(x^2)\right). \end{aligned}$$

Eftersom $1/3+\mathcal{O}(x^2)$ är strängt positivt i någon omgivning till origo, och $x^6 \geq 0$ (med likhet endast om $x=0$) ser vi att $f(0)=2 \leq f(x)$ gäller i någon omgivning till origo (med likhet endast om $x=0$ i denna omgivning). Alltså har f ett (strängt) lokalt minimum i $x=0$.

Svar: Lokalt minimum.

2a. Det karaktäristiska polynomet till $y'' - y' - 2y$ ges av $r^2 - r - 2 = (r-2)(r+1)$, vilket ger homogenlösningarna

$$y_h = Ae^{2x} + Be^{-x}.$$

Ansatsen $y_p = ax + b$ ger $y_p' = a$ och $y_p'' = 0$. Insatt i ekvationen får vi

$$y_p'' - y_p' - 2y_p = -a - 2(ax+b) = 2x + 5 \Leftrightarrow -2a = 2 \text{ och } -a - 2b = 5 \Leftrightarrow a = -1 \text{ och } b = -2.$$

Svar: $y = Ae^{2x} + Be^{-x} - x - 2$.

2b. Derivation av ekvationen, samt instättning av $x = 0$ ger att integralekvationen är ekvivalent med differentialekvationen $3y' - 2x/y^2 = 0$ med bivillkoret $3y(0) = 6$, dvs. $y(0) = 2$.

Om $y \neq 0$ har vi

$$3y' - 2x/y^2 = 0 \Leftrightarrow 3y' = 2x/y^2 \Leftrightarrow 3y^2y' = 2x.$$

Integration av bägge sidor ger

$$\int 3y^2y'dx = \int 3y^2dy = \int 2xdx \Leftrightarrow y^3 = x^2 + C.$$

Bivillkoret ger nu

$$2^3 = 0 + C \Leftrightarrow C = 8.$$

Alltså får vi

$$y = \sqrt[3]{x^2 + 8}.$$

Eftersom $x^2 + 8 \geq 8$ ser vi att detta löser ekvationen på hela $\mathbb{R}$.

Svar: $y = \sqrt[3]{x^2+8}$, $-\infty < x < \infty$.

3a. Integralen är generaliserad endast i $x = \infty$ eftersom $2x^2 + \sin x \geq 2 + \sin x \geq 1$ då $1 \leq x$. Vi jämför med

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\, dx,$$

som är konvergent.

$$\frac{\frac{1}{2x^2+\sin x}}{1/x^2} = \frac{1}{2 + \frac{\sin x}{x^2}} \to \frac{1}{2} \text{ då } x \to \infty \quad (0 < \frac{1}{2} < \infty).$$

Alltså är integralen konvergent enligt jämförelseprincipen på gränsvärdesform.

Svar: Konvergent.

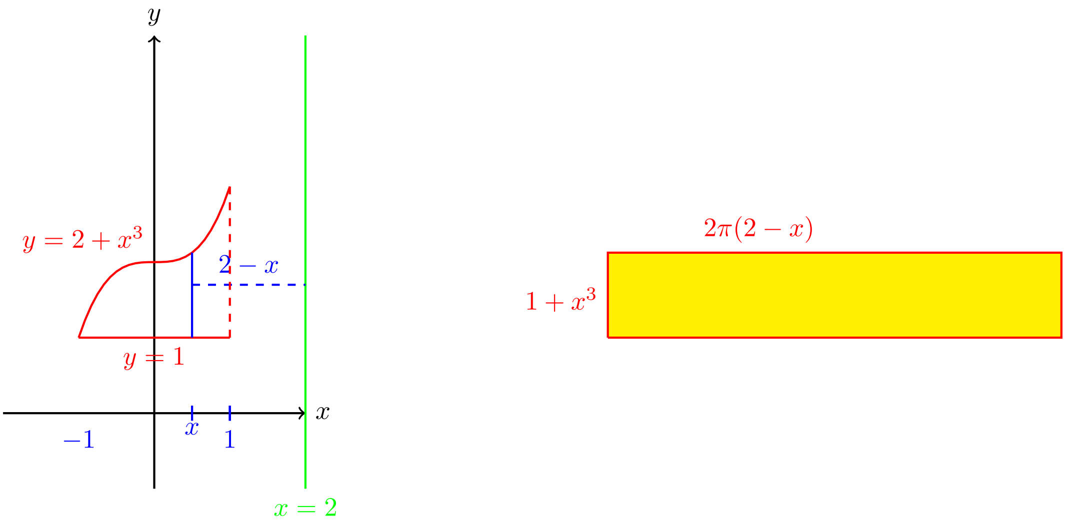
3b. Serien alternerar, termernas belopp $1/\sqrt{2k}$ avtar samt går mot 0 då $k \to \infty$. Alltså uppfyller serien alla tre krav i Leibniz kriterium, så serien är konvergent.

Svar: Konvergent.

3c. Eftersom $f(t) = 1/2t^2$ är avtagande på $[1, \infty[$ kan vi göra en integraluppskattning

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k^2} = \frac{1}{2} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{2k^2} \leq \frac{1}{2} + \int_1^\infty \frac{1}{2t^2}\, dt = \frac{1}{2} + \lim_{T\to\infty} \left[-\frac{1}{2t}\right]_1^T = 1.$$

4a.



När den blå stolpen vid x, som har höjd $(2+x^3)-1 = 1+x^3$, roteras kring $x=2$ uppstår en cylinder med omkrets $2\pi(2-x)$ (avståndet mellan x och linjen är $2-x$) och höjd $1+x^3$, som har area $2\pi\cdot(2-x)\cdot(1+x^3)$. Volymen av rotationskroppen ges av att integrera denna tvärsnittsarea från -1 till 1:

$$\int_{-1}^{1} 2\pi(2-x)(1+x^3)\,dx.$$

Svar: $\displaystyle\int_{-1}^{1} 2\pi(2-x)(1+x^3)\,dx.$

4b. Arean ges av

$$\int_0^\pi \frac{(\varphi+\varphi^2)^2}{2}\,d\varphi = \int_0^\pi \frac{\varphi^2+2\varphi^3+\varphi^4}{2}\,d\varphi = \left[\frac{\varphi^3}{6}+\frac{\varphi^4}{4}+\frac{\varphi^5}{10}\right]_0^\pi = \frac{\pi^3}{6}+\frac{\pi^4}{4}+\frac{\pi^5}{10}.$$

Svar: $\displaystyle\frac{\pi^3}{6}+\frac{\pi^4}{4}+\frac{\pi^5}{10}.$

5. Ansätt $y = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ och antag att serien har positiv konvergensradie. Då är serien deriverbar oändligt många gånger, derivatorna beräknas genom att derivera seriens termer och alla de deriverade serierna har samma konvergensradie enligt Sats 10.16, sid 465 i boken. Vi får

$$\begin{aligned}
y' &= D\left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k\right) = D\left(c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k x^k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k-1},\\
y'' &= D(y') = D\left(\sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k-1}\right) = D\left(c_1 + \sum_{k=2}^{\infty} k c_k x^{k-1}\right) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) c_k x^{k-2}.
\end{aligned}$$

Insättning i ekvationen ger

$$x^2y'' - 2xy' + (4x^2+2)y = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k x^k - \sum_{k=1}^{\infty} 2k c_k x^k + \sum_{k=0}^{\infty} 2c_k x^k + \sum_{k=0}^{\infty} 4c_k x^{k+2}. \tag{1}$$

Omsummation av den sista summan ger

$$\sum_{k=0}^{\infty} 4c_k x^{k+2} = 4c_0x^2 + 4c_1x^3 + \ldots = \sum_{k=2}^{\infty} 4c_{k-2}x^k$$

som i (1) ger

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=2}^{\infty}[(k(k-1)-2k+2)c_k + 4c_{k-2}]x^k - 2c_1x + 2c_0 + 2c_1x =\\
&\quad = 2c_0 + \sum_{k=2}^{\infty}[(k^2-3k+2)c_k + 4c_{k-2}]x^k =\\
&\quad = 2c_0 + 4c_0x^2 + \sum_{k=3}^{\infty}[(k-2)(k-1)c_k + 4c_{k-2}]x^k = 0.
\end{aligned}$$

(Notera att vi valde att plocka ut termen för $k=2$ ur summan eftersom faktorn framför c_k, $(k-2)(k-1)$ blir 0 för $k=2$.) Ovanstående ger då att alla koefficienter för x^k måste vara 0, dvs. $c_0 = 0$ och

$$(k-2)(k-1)c_k + 4c_{k-2} = 0 \iff c_k = \frac{-4}{(k-2)(k-1)}c_{k-2},\ k \geq 3.$$

Eftersom c_k också är koefficienterna för x^k i Maclaurinutvecklingen av $y(x)$ fås att

$$c_1 = y'(0) = 1 \quad \text{och} \quad c_2 = \tfrac{y''(0)}{2} = -1$$

vilket ger

$\underline{k=3}$: $\quad c_3 = \dfrac{-4}{(3-2)(3-1)}c_1 = -\dfrac{4}{2!} = -2,\qquad$ $\underline{k=4}$: $\quad c_4 = \dfrac{-4}{2\cdot 3}c_2 = -\dfrac{4}{3!}(-1) = \dfrac{4}{3!} = \dfrac{2}{3},$

$\underline{k=5}$: $\quad c_5 = \dfrac{-4}{3\cdot 4}c_3 = \dfrac{4^2}{4!} = \dfrac{2}{3},\qquad$ $\underline{k=6}$: $\quad c_6 = \dfrac{-4}{4\cdot 5}c_4 = -\dfrac{4^2}{5!} = -\dfrac{2}{15}.$

För att beräkna konvergensradien delar vi upp serien i udda och jämna potenser då rekursionsformeln hoppar två steg,

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k} x^{2k} + \sum_{k=1}^{\infty} c_{2k-1} x^{2k-1}.$$

Om vi börjar med serien med jämna potenser så fås med kvotkriteriet och rekursionsformeln ovan och $n = 2k$ för $k > 1$

$$\left|\frac{c_{2k}x^{2k}}{c_{2k-2}x^{2k-2}}\right| = |x|^2 \left|\frac{c_{2k}}{c_{2k-2}}\right| = \Big[2k = n\Big] = |x|^2 \left|\frac{c_n}{c_{n-2}}\right| = \frac{4|x|^2}{(n-2)(n-1)} \to 0$$

för alla $x \in \mathbb{R}$ då $2k = n \to \infty$. Följaktligen är serien med jämna potenser konvergent för alla $x \in \mathbb{R}$. För de udda potenserna med och $n = 2k + 1$ för $k > 1$ fås

$$\left|\frac{c_{2k+1}x^{2k+1}}{c_{2k-1}x^{2k-1}}\right| = |x|^2 \left|\frac{c_{2k+1}}{c_{2k-1}}\right| = \Big[2k = n-1\Big] = |x|^2 \left|\frac{c_n}{c_{n-2}}\right| = \frac{4|x|^2}{(n-2)(n-1)} \to 0$$

för alla $x \in \mathbb{R}$ då $2k - 1 = n - 1 \to \infty$. Följaktligen är serien med udda potenser konvergent för alla $x \in \mathbb{R}$. Då båda serierna är konvergenta för alla $x \in \mathbb{R}$ gäller samma sak för deras summa.

Svar: $c_0 = 0$, $c_1 = 1$, $c_2 = -1$, $c_3 = -2$, $c_4 = \frac{2}{3}$, $c_5 = \frac{2}{3}$, $c_6 = -\frac{2}{15}$, konvergensradie$= \infty$.

Anmärkning: Om man räknar ut några fler c_k och systematiserar lite mer kan man se att lösningen är $y = x\cos 2x - \frac{x}{2}\sin 2x$.

6. Integralen är generaliserad i både 0 och ∞:

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx = \int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx + \int_1^{\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx.$$

Eftersom

$$\left|\frac{\cos x}{\sqrt{x}}\right| \le \frac{1}{\sqrt{x}},$$

och

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$

är konvergent följer det av jämförelseprincipen att

$$\int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx$$

är absolutkonvergent, och därmed konvergent. Vi noterar nu att

$$\int_1^T \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx = \left[\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right]_1^T + \int_1^T \frac{\sin x}{2x^{3/2}}\,dx.$$

Vi har att

$$\left[\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right]_1^T = \frac{\sin T}{\sqrt{T}} - \frac{\sin 1}{1} \to \frac{-\sin 1}{1} \text{ då } T \to \infty.$$

Vidare har vi att eftersom

$$\left|\frac{\sin x}{2x^{3/2}}\right| \le \frac{1}{x^{3/2}},$$

och

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{3/2}}\,dx$$

är konvergent så följer det att

$$\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{2x^{3/2}}\,dx$$

är absolutkonvergent. Med andra ord existerar gränsvärdet (ändligt):

$$\lim_{T\to\infty} \int_1^T \frac{\sin x}{2x^{3/2}}\,dx,$$

och med andra ord är även

$$\int_1^{\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx$$

konvergent.

Svar: Konvergent.