TATA42 Envariabelanalys 2 exempeltenta 3, lösningsförslag

1. (a) Vi utvecklar f så långt att vi ser den ledande variabla termen. Eftersom $\binom{1/2}{2} = -1/8$ får vi, med $t = x^2$, att $\sqrt{1+x^2} = (1+t)^{1/2} = 1 + t/2 - t^2/8 + \mathcal{O}(t^3) = 1 + x^2/2 - x^4/8 + \mathcal{O}(x^6)$, så

$$f(x) = \cos x + \sqrt{1+x^2} = \big(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \mathcal{O}(x^6)\big) + \big(1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + \mathcal{O}(x^6)\big)$$
$$= 2 - \frac{x^4}{12} + \mathcal{O}(x^6) = 2 + x^4\Big(-\frac{1}{12} + \mathcal{O}(x^2)\Big).$$

Eftersom $x^4 > 0$ då $x \neq 0$ och $-1/12 + \mathcal{O}(x^2) < 0$ för x nära 0 följer det att $f(x) < 2 = f(0)$ för $x \neq 0$ nära 0, så f har (strängt) lokalt maximum i $x = 0$.

(b) Sätt $t = 1/x$; observera att $x \to \infty \Rightarrow t \to 0^+$. Vi får, med standardutvecklingar,

$$x^3\left(\arctan\frac{1}{x} - \sin\frac{1}{x}\right) = \frac{\arctan t - \sin t}{t^3} = \frac{\big(t - t^3/3 + \mathcal{O}(t^5)\big) - \big(t - t^3/6 + \mathcal{O}(t^5)\big)}{t^3}$$
$$= \frac{-t^3/6 + \mathcal{O}(t^5)}{t^3} = -\frac{1}{6} + \mathcal{O}(t^2) \to -\frac{1}{6} \quad \text{då } t \to 0^+, \text{ d.v.s. då } x \to \infty.$$

(c) Vi får successivt

$$f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}, \quad f'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2}, \quad f''(x) = -\frac{1}{4}x^{-3/2},$$

så

$$f(4) = 2, \quad f'(4) = \frac{1}{4}, \quad f''(4) = -\frac{1}{32},$$

varför

$$\sqrt{x} = f(x) = f(4) + f'(4)(x-4) + \frac{f''(4)}{2!}(x-4)^2 + \mathcal{O}\big((x-4)^3\big)$$
$$= 2 + \frac{1}{4}(x-4) - \frac{1}{64}(x-4)^2 + \mathcal{O}\big((x-4)^3\big).$$

<u>Svar</u>: (a) Lokalt maxiumum (b) $-\frac{1}{6}$ (c) $2 + \frac{1}{4}(x-4) - \frac{1}{64}(x-4)^2 + \mathcal{O}\big((x-4)^3\big)$.

2. (a) Derivering av integralekvationen ger differentialekvationen $y'(x) + y(x) = 0$, och insättning av $x = 0$ i integralekvationen ger $y(0) = 3$. Ekvationen $y' + y = 0$ är homogen och har karakteristiskt polynom $p(r) = r + 1$, med enda nollstället $r_1 = -1$; alltså är $y = A\,e^{-x}$, och $y(0) = 3$ ger $A = 3$, så $y = 3\,e^{-x}$.

(b) Det karakteristiska polynomet $p(r) = r^3 + r^2 + 3r - 5 = (r-1)(r^2 + 2r + 5)$ har nollställena $r_1 = 1$ och $r_{2,3} = -1 \pm 2i$, så homogenlösningen blir

$$y_h = A\,e^x + e^{-x}(B\cos 2x + C\sin 2x).$$

Vi söker nu en partikulärlösning y_p. Ansatsen $y_p = a\cos x + b\sin x$ ger $y_p' = b\cos x - a\sin x$, $y_p'' = -a\cos x - b\sin x$, $y_p''' = -b\cos x + a\sin x$, varför

$$y_p''' + y_p'' + 3y_p' - 5y_p = (-b - a + 3b - 5a)\cos x + (a - b - 3a - 5b)\sin x$$
$$= (2b - 6a)\cos x + (-2a - 6b)\sin x,$$

som blir lika med $20\cos x$ om $2b - 6a = 20$ och $-2a - 6b = 0$, d.v.s. om $a = -3$ och $b = 1$; alltså duger $y_p = -3\cos x + \sin x$. Således blir den allmänna lösningen

$$y = y_h + y_p = A\,e^x + e^{-x}(B\cos 2x + C\sin 2x) - 3\cos x + \sin x.$$

<u>Svar</u>: (a) $y = 3\,e^{-x}$ (b) $y = A\,e^x + e^{-x}(B\cos 2x + C\sin 2x) - 3\cos x + \sin x$.

3. (a) Eftersom

$$\frac{1}{3k-1} \geq \frac{1}{3k} \geq 0 \quad \text{då } k \geq 1 \text{ och} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3k} = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \quad \text{är divergent,}$$

följer att den givna serien $\sum_{k=1}^{\infty} 1/(3k-1)$ också är divergent, enligt jämförelsekriteriet för positiva serier. Svar: Divergent.

(b)

$$0 \leq \frac{1}{x^2+e^x} \leq \frac{1}{e^x} = e^{-x},\ x>0 \quad \Rightarrow \quad \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+e^x} \leq \int_0^{\infty} e^{-x}dx = \big[-e^{-x}\big]_0^{\infty} = 1 \leq 2.$$

(c) Om $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ är divergent följer med nödvändighet att delsummorna $\sum_{k=1}^{n} |a_k| \to \infty$ då $n \to \infty$, eftersom termerna $|a_k| \geq 0$.

Däremot behöver det inte vara sant att $a_k \not\to 0$ då $k \to \infty$ (motexempel $a_k = 1/k$) eller att $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ är divergent (motexempel $a_k = (-1)^k/k$).

I denna uppgift ska vi endast svara, så ovanstående resonemang ska inte lämnas in. Däremot ska följande lämnas in: Svar: (ii).

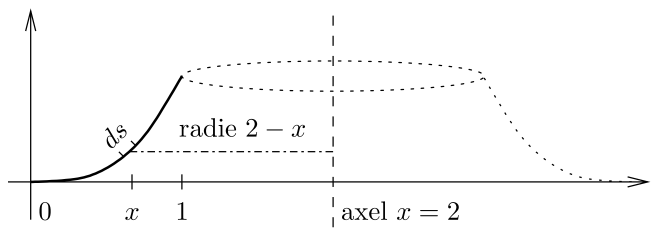
4. (a) För kurvan $r = \sin 2\varphi$, $0 \leq \varphi \leq \pi/2$, i polära koordinater blir bågelementet (för växande φ)

$$ds = \sqrt{(dx)^2+(dy)^2} = \sqrt{\big(r(\varphi)\big)^2 + \big(r'(\varphi)\big)^2}\ d\varphi = \sqrt{\sin^2 2\varphi + 4\cos^2 2\varphi}\ d\varphi = ds(\varphi),$$

så kurvans längd L blir

$$L = \int_0^{\pi/2} ds(\varphi) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin^2 2\varphi + 4\cos^2 2\varphi}\ d\varphi = \underline{\text{Svar}}.$$

(b)



För kurvan $y = 2x^{3/2}/3$, $0 \leq x \leq 1$, blir bågelementet (för växande x)

$$ds = \sqrt{(dx)^2+(dy)^2} = \sqrt{1+(dy/dx)^2}\ dx = (1+x)^{1/2}\,dx = ds(x).$$

När bågelementet vid x roterar kring axeln $x=2$ skapar det ett snett cirkulärt band med radie $r(x) = 2-x$ och kantlängd $ds(x)$ och därmed area $dA(x) = 2\pi r(x)\,ds(x)$. Vi får därför att arean A av rotationsytan blir

$$A = \int_0^1 2\pi(2-x)\,ds(x) = 2\pi\int_0^1 (2-x)(1+x)^{1/2}\,dx = \Big/\, t = 1+x \,\Big/$$

$$= 2\pi\int_1^2 (3t^{1/2} - t^{3/2})\,dt = 2\pi\left[\frac{3t^{3/2}}{3/2} - \frac{t^{5/2}}{5/2}\right]_1^2 = \frac{8\pi}{5}(3\sqrt{2}-2) = \underline{\text{Svar}}.$$

5. Sätt $f(x) = \ln(1+x)$. Direkt uträkning av derivator ger

$$f'(x) = (1+x)^{-1},\ f''(x) = -(1+x)^{-2},\ f'''(x) = 2(1+x)^{-3} \text{ och } f^{(4)}(x) = -6(1+x)^{-4},$$

så

$$f(0) = 0,\ f'(0) = 1,\ f''(0) = -1,\ f'''(0) = 2 \text{ och } f^{(4)}(\xi) = -6(1+\xi)^{-4}.$$

Maclaurinutvecklingen av ordning 3 för $\ln(1+x)$ blir därför

$$\begin{aligned}\underbrace{\ln(1+x)}_{\text{Exakt värde}} &= f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}x^4 \\ &= \underbrace{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}}_{\text{Approximation}} \underbrace{- \frac{x^4}{4(1+\xi)^4}}_{\text{Approximationsfel}}\end{aligned}$$

för något $\xi = \xi(x)$ mellan 0 och x.

(Om denna längd på utvecklingen räcker för att bevisa den önskade olikheten upptäcker vi vid feluppskattningen nedan. I annat fall är det bara att gå tillbaka och utveckla lite längre.)

Sätt $p(x) = x - x^2/2 + x^3/3$, och antag att $|x| \le 1/4$. Då måste ξ, som ju ligger mellan 0 och x för varje enskilt x, också vara instängt i intervallet $-1/4 \le \xi \le 1/4$; speciellt är $1+\xi \ge 3/4$ och därmed $1/(1+\xi)^4 \le 1/(3/4)^4$, så

$$\left|\ln(1+x) - p(x)\right| = \left|-\frac{x^4}{4(1+\xi)^4}\right| = \frac{|x|^4}{4(1+\xi)^4} \le \frac{(1/4)^4}{4(3/4)^4} = \frac{1}{4\cdot 3^4} = \frac{1}{4\cdot 81} = \frac{1}{324} < \frac{1}{300},$$

så längden på utvecklingen var således tillräcklig.

<u>Svar</u>: $p(x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3}$ duger.

6. Vi börjar med att visa att problemet är meningsfullt, d.v.s. att serien är konvergent åtminstone för $-1 < x < 1$:

$$\left|\frac{(-1)^k}{k(k-1)}x^{2k}\right|^{1/k} = \frac{|x|^2}{(k(k-1))^{1/k}} = \frac{|x|^2}{(k^{1/k})^2((1-\frac{1}{k}))^{1/k}} \to |x|^2 = Q$$

då $k \to \infty$, och rotkriteriet ger att serien är absolutkonvergent då $Q < 1$, d.v.s. då $|x| < 1$, och divergent då $Q > 1$, d.v.s. då $|x| > 1$; följaktligen är seriens konvergensradie $R = 1$.

Enligt sats är serien också deriverbar då $|x| < 1$, och vi får derivatan genom att derivera seriens termer, d.v.s.

$$\begin{aligned}
y(x) &= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k(k-1)}x^{2k}, \\
y'(x) &= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k 2k}{k(k-1)}x^{2k-1} = 2\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k-1}x^{2k-1} = 2\left(x^3 - \frac{1}{2}x^5 + \frac{1}{3}x^7 - \dots\right) \\
&= 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}x^{2k+1}.
\end{aligned}$$

Här har vi skrivit serien för y' på två olika sätt för att det skall bli enklare att använda i nästa steg.

$$\begin{aligned}
(1+x^2)y'(x) &= 2\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}x^{2k+1} + x^2\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k-1}x^{2k-1}\right) \\
&= 2\left(x^3 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}x^{2k+1} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k-1}x^{2k+1}\right) \\
&= 2x^3 + 2\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right)x^{2k+1} \\
&= 2x^3 + 2\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k(k-1)}x^{2k+1} \\
&= 2x^3 + 2x\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k(k-1)}x^{2k} \\
&= 2x^3 + 2xy(x),
\end{aligned}$$

d.v.s. $y(x)$ löser den givna ekvationen då $-1 < x < 1$.

Vi noterar att insättning av $x = 0$ i serien för $y(x)$ ger $y(0) = 0$. Då differentialekvationen är linjär av första ordningen löser vi den nu med hjälp av integrerande faktor:

$$(1+x^2)y' - 2xy = 2x^3 \quad \Leftrightarrow \quad y' - \frac{2x}{1+x^2}y = \frac{2x^3}{1+x^2}$$

$$\Big/ \int\left(-\frac{2x}{1+x^2}\right)dx = -\ln\left(1+x^2\right) \quad (\textit{en}\ \text{primitiv}) \quad \Rightarrow \quad \text{I.F.} = e^{-\ln\left(1+x^2\right)} = \frac{1}{1+x^2} \Big/$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad \left(\frac{1}{1+x^2}y\right)' = \frac{2x^3}{(1+x^2)^2} = \frac{2x(1+x^2-1)}{(1+x^2)^2} = \frac{2x}{1+x^2} - \frac{2x}{(1+x^2)^2} \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{1}{1+x^2}y = \ln(1+x^2) + \frac{1}{1+x^2} + C.
\end{aligned}$$

Att $y(0) = 0$ ger $0 = \ln 1 + 1 + C$, d.v.s. $C = -1$, så $y = (1+x^2)\ln(1+x^2) + 1 - (1+x^2) = (1+x^2)\ln(1+x^2) - x^2$.

Eftersom både serien och denna funktion löser ekvationen i intervallet $-1 < x < 1$ och lösningen är entydigt bestämd gäller

$$y = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k(k-1)}x^{2k} = (1+x^2)\ln(1+x^2) - x^2, \quad -1 < x < 1.$$