TATA42 ENVARIABELANALYS 2 EXEMPELTENTA 4, LÖSNINGSFÖRSLAG.

1a. Eftersom $\arctan x = x - x^3/3 + \mathcal{O}(x^5)$ och $\sin x = x - x^3/6 + \mathcal{O}(x^5)$ får vi

$$\frac{\arctan x - \sin x}{x^3} = \frac{(x - x^3/3 + \mathcal{O}(x^5)) - (x - x^3/6 + \mathcal{O}(x^5))}{x^3} = \frac{-x^3/6 + \mathcal{O}(x^5)}{x^3} = -\frac{1}{6} + \mathcal{O}(x^2) \to -\frac{1}{6} \text{ då } x \to 0.$$

Svar: $-1/6$.

1b.

$$\mathcal{O}(x^4) + \mathcal{O}((x + x^3)^2) = \mathcal{O}(x^4) + \mathcal{O}(x^2 + 2x^4 + x^6) = \mathcal{O}(x^2),$$

så $n = 2$.

Svar: $n = 2$.

1c. $f(x) = \cos(2x)$, $f(0) = 1$, $f'(x) = -2\sin(2x)$, $f'(0) = 0$, $f''(x) = -4\cos(2x)$, $f''(0) = -4$, $f'''(x) = 8\sin(2x)$. Så

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(\xi)}{3!}x^3 = 1 - 2x^2 + \frac{4\sin(2\xi)}{3}x^3 \text{ för något } \xi \text{ mellan } 0 \text{ och } x.$$

Svar: $f(x) = 1 - 2x^2 + \frac{4\sin(2\xi)}{3}x^3$ för något ξ mellan 0 och x.

2 (a). Det karaktäristiska polynomet till $y^{(4)} + 4y''$ är $r^4 + 4r^2 = r^2(r^2 + 4) = r^2(r - 2i)(r + 2i)$, så den allmänna lösningen till ekvationen (som är homogen) är

$$y = Ax + B + C\cos(2x) + D\sin(2x).$$

Svar: $y = Ax + B + C\cos(2x) + D\sin(2x)$.

2 (b).

$$y' - 2e^{-y}x = -2e^{-y} \Leftrightarrow y' = e^{-y}(2x - 2) \Leftrightarrow e^y y' = 2x - 2,$$

integration av bägge sidor i den sista ekvationen ger

$$\int e^y y'\,dx = \int e^y\,dy = \int (2x - 2)\,dx,$$

så

$$e^y = x^2 - 2x + c.$$

Bivillkoret $y(0) = 0$ ger $e^0 = 1 = c$. Så

$$e^y = x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2 \quad x \neq 1,$$

vilket ger oss lösningen

$$y = \ln((x - 1)^2) = 2\ln(1 - x), \quad x < 1.$$

(OBS! $2\ln(x - 1)$ vore fel här då $x - 1$ är negativt för $x < 1$.)

Svar: $y = \ln((x - 1)^2) = 2\ln(1 - x), \quad x < 1$.

3a. Eftersom vi för $0 < x < 1$ har

$$0 \leq \frac{\sqrt{2x}}{3x + x^4} \leq \frac{\sqrt{2}\sqrt{x}}{3x} = \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}},$$

och

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$

är konvergent, följer det av jämförelseprincipen att integralen är konvergent.

Svar: Konvergent.

3b. Eftersom alla termer i serien är positiva får vi

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2} \geq \sum_{k=2}^{4} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} = \frac{61}{144} \geq \frac{60}{144} = \frac{5}{12}.$$

3c.

$$\sum_{k=2}^{\infty} 3^{-k} = 3^{-2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k = 3^{-2} \frac{1}{1 - 1/3} = \frac{1}{6}.$$

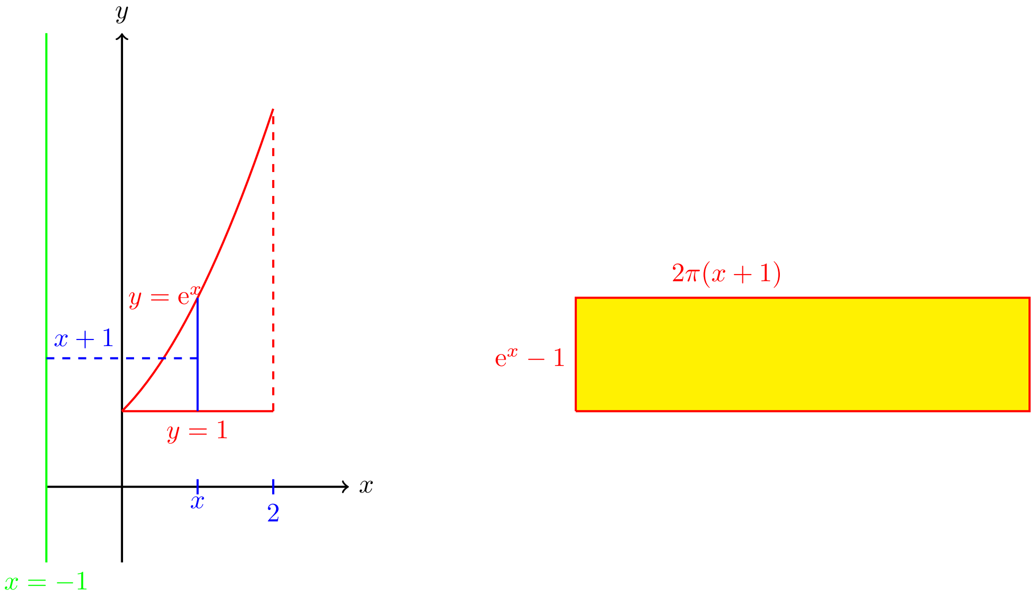
Svar: $1/6$.

4a.

$$\int_1^3 \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt = \int_1^3 \sqrt{(2t)^2 + (\mathrm{e}^t)^2}\, dt = \int_1^3 \sqrt{4t^2 + \mathrm{e}^{2t}}\, dt.$$

Svar: $\int_1^3 \sqrt{4t^2 + \mathrm{e}^{2t}}\, dt.$

4b.



När den blå stolpen vid $x = 1$, som har höjd $e^x - 1$ rotaterar kring $x = -1$ så uppstår en cylinder som har radie $x + 1$, och mantelyta $2\pi(x+1)(\mathrm{e}^x - 1)$. Genom att multiplicera mantelarean för denna cylinder med en liten tjocklek dx så erhåller vi volymselementen

$$dV(x) = 2\pi(x+1)(\mathrm{e}^x - 1)\, dx.$$

Vi summerar volymselementen och ser via partialintegration att

$$\begin{aligned} V &= \int_0^2 dV(x) = 2\pi \int_0^2 (x+1)(\mathrm{e}^x - 1)\, dx \\ &= 2\pi \left[(x+1)\left(\mathrm{e}^x - x\right)\right]_0^2 - 2\pi \int_0^2 \left(\mathrm{e}^x - x\right)\, dx \\ &= 2\pi \left[(x+1)\left(\mathrm{e}^x - x\right) - \mathrm{e}^x + \frac{x^2}{2}\right]_0^2 = 4\pi\left(\mathrm{e}^2 - 2\right). \end{aligned}$$

Svar: $4\pi\left(\mathrm{e}^2 - 2\right).$

5. Integralen är generaliserad i både 0 och ∞.
För $0 \le x \le 1$ så gäller att $0 \le x \le \sqrt{x}$ och $0 \le x^4 \le x$, så

$$\int_0^1 \frac{x + \sqrt{x}}{x + x^4}\, dx \ge \int_0^1 \frac{x + x}{x + x}\, dx = 1$$

och

$$\int_0^1 \frac{x + \sqrt{x}}{x + x^4}\, dx \le \int_0^1 \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x}}{x + 0}\, dx = \int_0^1 \frac{2}{\sqrt{x}}\, dx = \left[4\sqrt{x}\right]_0^1 = 4.$$

Vi noterar att då integranden är positiv så gäller även att

$$\int_0^\infty \frac{x + \sqrt{x}}{x + x^4}\, dx \ge \int_0^1 \frac{x + \sqrt{x}}{x + x^4}\, dx \ge 1,$$

vilket är precis den vänstra olikheten vi ville visa. Vidare ser vi att för $x \ge 1$ så är $\sqrt{x} \le x$, vilket medför att

$$\int_1^\infty \frac{x + \sqrt{x}}{x + x^4}\, dx \le \int_1^\infty \frac{x + x}{0 + x^4}\, dx = \int_1^\infty \frac{2}{x^3}\, dx = \left[-\frac{1}{x^2}\right]_1^\infty = 1.$$

Således gäller att

$$\int_0^\infty \frac{x+\sqrt{x}}{x+x^4}\,dx \le \int_0^1 \frac{x+\sqrt{x}}{x+x^4}\,dx + \int_1^\infty \frac{x+\sqrt{x}}{x+x^4}\,dx \le 4+1=5,$$

vilket bevisar den högra olikheten i uppgiften.

6. För att enklare kunna använda Maclaurinutveckling byter vi variabel och sätter $t=\frac{1}{x}$ så att $t\to 0^+$ då $x\to\infty$. Vi får

$$x^2\left(\sqrt[3]{x^3+ax^2}-\sqrt{x^2+bx-1}\right)=\frac{1}{t^2}\left(\sqrt[3]{\frac{1}{t^3}+\frac{a}{t^2}}-\sqrt{\frac{1}{t^2}+\frac{b}{t}-1}\right)=$$

$$=\frac{1}{t^2}\left(\frac{1}{t}\sqrt[3]{1+at}-\frac{1}{t}\sqrt{1+bt-t^2}\right)=\frac{1}{t^3}\left(\sqrt[3]{1+at}-\sqrt{1+bt-t^2}\right).$$

P.g.a. faktorn $\frac{1}{t^3}$ inses att det räcker med utveckling till ordning 3 med resterm av grad 4.

$$\sqrt[3]{1+at}=1+\binom{1/3}{1}at+\binom{1/3}{2}(at)^2+\binom{1/3}{3}(at)^3+\mathcal{O}(t^4)=$$

$$=\left[\ \tbinom{1/3}{1}=\tfrac{1}{3},\ \tbinom{1/3}{2}=\tfrac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)}{2!}=-\tfrac{1}{9},\ \tbinom{1/3}{3}=\tfrac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)(\frac{1}{3}-2)}{3!}=-\tfrac{1}{9}\left(-\tfrac{5}{9}\right)=\tfrac{5}{81}\ \right]=$$

$$=1+\frac{a}{3}t-\frac{a^2}{9}t^2+\frac{5a^3}{81}t^3+\mathcal{O}(t^4).$$

Då utvecklingen av nästa term blir likartad men lite mer komplicerad tänker vi $s=bt-t^2$ och tittar på delarna separat.

$$\sqrt{1+bt-t^2}=\sqrt{1+s}=1+\frac{1}{2}s-\frac{1}{8}s^2+\frac{1}{16}s^3+\mathcal{O}(s^4)=$$

$$=\Bigg[\binom{1/2}{1}=\frac{1}{2},\ \binom{1/2}{2}=\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2!}=-\frac{1}{8},\ \binom{1/2}{3}=\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)}{3!}=-\frac{1}{8}\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{16},$$

$$s^2=(bt-t^2)^2=b^2t^2-2bt^3+t^4=b^2t^2-2bt^3+\mathcal{O}(t^4),$$

$$s^3=(bt-t^2)\left(b^2t^2-2bt^3+t^4\right)=b^3t^3+\mathcal{O}(t^4)\Bigg]=$$

$$=1+\frac{1}{2}\left(bt-t^2\right)-\frac{1}{8}\left(b^2t^2-2bt^3\right)+\frac{1}{16}b^3t^3+\mathcal{O}(t^4)=$$

$$=1+\frac{b}{2}t-\frac{1}{2}t^2-\frac{b^2}{8}t^2+\frac{b}{4}t^3+\frac{b^3}{16}t^3+\mathcal{O}(t^4)=$$

$$=1+\frac{b}{2}t-\left(\frac{1}{2}+\frac{b^2}{8}\right)t^2+\left(\frac{b}{4}+\frac{b^3}{16}\right)t^3+\mathcal{O}(t^4).$$

Sammantaget fås då

$$\sqrt[3]{1+at}-\sqrt{1+bt-t^2}=1+\frac{a}{3}t-\frac{a^2}{9}t^2+\frac{5a^3}{81}t^3-$$

$$-\left(1+\frac{b}{2}t-\left(\frac{1}{2}+\frac{b^2}{8}\right)t^2+\left(\frac{b}{4}+\frac{b^3}{16}\right)t^3\right)+\mathcal{O}(t^4)=$$

$$=\left(\frac{a}{3}-\frac{b}{2}\right)t+\left(\frac{1}{2}-\frac{a^2}{9}+\frac{b^2}{8}\right)t^2+\left(\frac{5a^3}{81}-\frac{b}{4}-\frac{b^3}{16}\right)t^3+\mathcal{O}(t^4)$$

så att

$$\frac{\sqrt[3]{1+at}-\sqrt{1+bt-t^2}}{t^3}=\frac{\left(\frac{a}{3}-\frac{b}{2}\right)t+\left(\frac{1}{2}-\frac{a^2}{9}+\frac{b^2}{8}\right)t^2+\left(\frac{5a^3}{81}-\frac{b}{4}-\frac{b^3}{16}\right)t^3+\mathcal{O}(t^4)}{t^3}=$$

$$=\left(\frac{a}{3}-\frac{b}{2}\right)\frac{1}{t^2}+\left(\frac{1}{2}-\frac{a^2}{9}+\frac{b^2}{8}\right)\frac{1}{t}+\left(\frac{5a^3}{81}-\frac{b}{4}-\frac{b^3}{16}\right)+\mathcal{O}(t).$$

Om vi ur ovanstående skall kunna få ett ändligt gränsvärde då $t\to 0^+$ måste $\frac{1}{t}$- och $\frac{1}{t^2}$-termerna försvinna. Det ger att $\dfrac{a}{3}-\dfrac{b}{2}=0 \iff a=\dfrac{3b}{2}$ som insatt i koefficienten för $\frac{1}{t}$-termen ger

$$\frac{1}{2}-\frac{a^2}{9}+\frac{b^2}{8}=\frac{1}{2}-\frac{9b^2}{4\cdot 9}+\frac{b^2}{8}=\frac{1}{2}-\frac{b^2}{4}+\frac{b^2}{8}=\frac{1}{2}-\frac{b^2}{8}=0 \iff b^2=4 \iff b=\pm 2$$

vilket i sin tur ger $a = 3$ då $b = 2$ och $a = -3$ då $b = -2$. Slutligen, med dessa värden på a, b blir gränsvärdet

$$\underline{\underline{a = 3, b = 2}}: \qquad \frac{5a^3}{81} - \frac{b}{4} - \frac{b^3}{16} = \frac{5 \cdot 27}{81} - \frac{2}{4} - \frac{8}{16} = \frac{5}{3} - 1 = \frac{2}{3},$$

$$\underline{\underline{a = -3, b = -2}}: \qquad \frac{5a^3}{81} - \frac{b}{4} - \frac{b^3}{16} = -\frac{5 \cdot 27}{81} + \frac{2}{4} + \frac{8}{16} = -\frac{5}{3} + 1 = -\frac{2}{3},$$

Svar: $2/3$ då $a = 3, b = 2$ samt $-2/3$ då $a = -3, b = -2$.