Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Matematik och tillämpad matematik

Utbildningskod: TATA42
Modul: TEN1

Tentamen i Envariabelanalys 2

2020-08-29 kl 14.00–19.00

Inga hjälpmedel. Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar.

Varje uppgift bedöms som godkänd eller underkänd. Godkända uppgifter ger sedan 2 eller 3 poäng medan underkända ger 0 eller 1 poäng. För betyg 3/4/5 räcker 3/4/5 godkända uppgifter och 8/12/16 poäng.

Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

1. Låt $D = \{(x, y)\colon -x \leq y \leq 2 - x^2,\ 0 \leq x \leq 1\}$. Teckna, som integraler, volymen som fås då området D roterar ett varv kring
   (a) linjen $y = -3$,
   (b) linjen $x = 3$.

   (För full poäng krävs principskisser som motiverar formlerna. Notera att integralerna ej behöver beräknas.)

2. Beräkna nedanstående gränsvärden:
   (a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2) - x^2}{\cos(x^3) - 1}$,
   (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1 + \arctan x) - x}{x^2}$
   (c) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{x^3}(x - \sin x) + x^3\left(\frac{1}{x} - \sin\frac{1}{x}\right)\right)$.

3. Bestäm alla lösningar $y(x)$ till $y''' - y' = 4e^x$ för vilka $\lim_{x\to-\infty} y(x)$ existerar (ändligt).

4. (a) Avgör om $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2 + \sqrt{x}}{e^x - 1}\,dx$ är konvergent. (1p)
   (b) Avgör för vilka x som $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k}{k5^k}$ är konvergent. (2p)

5. Bestäm Taylorutvecklingen till $f(x) = \ln(x/2)$ kring $x = 2$ av ordning 2 med restterm på Lagranges form (ordning 3) och visa med hjälp av denna utveckling att $|\ln(3/2) - 3/8| \leq 1/24$.

VAR GOD VÄND!

6. Visa att $y(x) = x$ löser ekvationen $x^2y'' - 4xy' + 4y = 0$, $x > 0$. Använd detta till att lösa ekvationen $x^2y'' - 4xy' + 4y = x^5e^x$, $x > 0$, fullständigt genom att ansätta $y(x) = xz(x)$.

7. Antag att den positiva serien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ är divergent och $a_1 > 0$. Låt $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ vara den n:e partialsumman till serien. För vilka $\alpha \in \mathbb{R}$ är serien

$$\sum_{k=2}^{\infty} \left(S_k^{\alpha} - S_{k-1}^{\alpha}\right) \text{ konvergent?}$$

För de α som serien konvergerar, ange summan (uttryckt i termerna a_k).