

Tentamen i Envariabelanalys 2

2020-08-29 kl 08.00–13.00

Inga hjälpmedel. Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar.

Varje uppgift bedöms som godkänd eller underkänd. Godkända uppgifter ger sedan 2 eller 3 poäng medan underkända ger 0 eller 1 poäng. För betyg 3/4/5 räcker 3/4/5 godkända uppgifter och 8/12/16 poäng.

Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

1. Lös differentialekvationen $(1 + x^2)y' - 2xy = x + x^3$, $y(0) = 1$.

2. Undersök följande gränsvärden:

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x + e^x - 2\sqrt{1+x}}{x^2}$ (b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \ln(1-2x)}{x - \arctan x}$ (c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \pi x}{x - \sqrt[3]{x}}$.

3. (a) Avgör konvergens: $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k+1}{k^2-k}$ (b) Avgör konvergens: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+1} dx$

(c) Visa att $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2+x^{11}} \leq \frac{1}{10}$.

4. Bestäm alla lösningar till $4y''' - 3y' + y = x^2 - 6x + 4$, $y(0) = 1$. (Obs! y''')

5. Bestäm ett polynom $p(x)$ sådant att $|\sin(x^3) - p(x)| \leq \frac{|x|^{15}}{120}$ för alla $x \in \mathbb{R}$, och hitta ett rationellt närmevärde till

$$\int_0^1 \sin(x^3) dx$$

med ett fel vars absolutbelopp är högst 1/1000.

6. Låt $\alpha > 0$ vara en given konstant. När kurvan $y = x^\alpha$, $0 \leq x \leq a$, roteras ett varv kring y -axeln genereras en skål som vi nu fyller helt med vatten, och en sjö bildas. Låt $V_\alpha(a)$ vara sjöns volym, $A_\alpha(a)$ vattenytans area och $d_\alpha(a)$ sjöns maximala djup. Vilka värden kan kvoten

$$\frac{V_\alpha(a)}{A_\alpha(a) \cdot d_\alpha(a)}, \quad a > 0,$$

anta (för givet α)?

7. Beräkna $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!(k^4 + k^2 + 1)}$. (Tips: Partialbråksuppdelning $\frac{1}{k^4 + k^2 + 1}$.)