Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Matematik och tillämpad matematik

Utbildningskod: TATA42
Modul: TEN1

Tentamen i Envariabelanalys 2

2020-10-21 kl 14.00–19.00

Inga hjälpmedel. Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar.

Varje uppgift bedöms som godkänd eller underkänd. Godkända uppgifter ger sedan 2 eller 3 poäng medan underkända ger 0 eller 1 poäng. För betyg 3/4/5 räcker 3/4/5 godkända uppgifter och 8/12/16 poäng.

Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

1. (a) Teckna, som integral (som ej behöver beräknas), volymen av den kropp som uppstår när området

$$-1 \leq x \leq 1, \quad 3 \leq y \leq 5 + x^2$$

roteras ett varv kring linjen $y = 1$. För full poäng krävs en principskiss som motiverar formeln som används.

(b) Teckna, som integral (som ej behöver beräknas), längden av kurvan

$$y = 5 + x^2, \quad -1 \leq x \leq 1.$$

(c) Teckna, som integral (som ej behöver beräknas), arean av den yta som uppstår då kurvan

$$y = 5 + x^2, \quad -1 \leq x \leq 1$$

roteras ett varv kring linjen $x = 2$. För full poäng krävs en principskiss som motiverar formeln som används.

2. Lös $yy' = \dfrac{1}{x}$, $y(\mathrm{e}) = -2$. (För full poäng ska även det största öppna intervallet där y är en lösning till ekvationen anges.)

3. Beräkna gränsvärdena:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos(2x) - 1}{\sin(\ln(1 + x^2))}$, (b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^2 \left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2x}} - \sqrt{1 + \frac{1}{x}} \right)$, (c) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\mathrm{e}^{3x} + \mathrm{e}^3(2 - 3x)}{(x - 1)^2}$

4. Avgör konvergens:

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k - 2}{k + 7}$, (b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\arctan(4x)}\, dx$, (c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \sin(1/k)$.

VÄND!

5. Bestäm $c_0, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$, samt bestäm konvergensradien, om $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ löser

$$y'' - x^2 y = 2 + 6x, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$$

6. Bestäm ett rationellt tal q sådant att

$$\left| \int_0^{1/2} \left(\sin(x^2) + e^{x^2} \right) \, dx - q \right| \leq \frac{1}{100}.$$

7. Bestäm **alla** funktioner $y(x)$, som är två gånger respektive tre gånger kontinuerligt deriverbara på hela $\mathbb{R}$, som löser

$$xy'' - 2y' + 9x^5 y = 0, \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

(Tips: sök lösningar på formen $y = f(x^n)$ för lämpligt heltal n.)