

Tentamen i Envariabelanalys 2

2021-03-20 kl 14.00–19.00

Inga hjälpmedel. Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar.

Varje uppgift bedöms som godkänd eller underkänd. Godkända uppgifter ger sedan 2 eller 3 poäng medan underkända ger 0 eller 1 poäng. För betyg 3/4/5 räcker 3/4/5 godkända uppgifter och 8/12/16 poäng.

Svar finns tidigast på måndag 22/3 på kursens hemsida.

1. Skriv som integraler (som ej behöver beräknas):

(a) den volym som uppstår då området $1 \leq x \leq 2$, $1 - e^x \leq y \leq 1$ roteras ett varv runt $x = 3$,

(b) den volym som uppstår då området $0 \leq x \leq 2$, $1 \leq y \leq 1 + e^x$ roteras ett varv runt $y = -1$,

(c) längden av kurvan $y = \sin(2x)$, $2 \leq x \leq 6$.

(För full poäng krävs principskisser som motiverar formlerna som används.)

2. Bestäm den allmänna lösningen till

$$y''' + y'' + 9y' + 9y = x e^{-x}.$$

(För full poäng ska svaret ges på reell form.)

3. Bestäm Maclaurinutvecklingen av ordning 1 till $f(x) = \tan x$, med restterm i Lagranges form (ordning 2). Visa sedan att

$$|\tan x - x| \leq 2|x|^2 \quad \text{då } |x| \leq \pi/4.$$

4. Bestäm den lösning till differentialekvationen

$$(x^2 + 1)y' = 2xy^2 + 2x$$

vars graf går genom punkten $(x, y) = (0, 1)$. Ange också största möjliga öppna intervall där lösningen är definierad.

5. (a) Bestäm konvergensradien R till $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k^2 + k + 2)x^k}{4^k}$. (1p)

(b) Visa att $2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{3/2}} \leq 3$. (2p)

Var god vänd!

6. Bestäm om möjligt konstanter a , b och c sådana att gränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^3 \left(a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2} - \ln \frac{x}{x-1} - \arctan x \right)$$

existerar ändligt. Vad blir gränsvärdet i så fall?

7. Visa att

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}, \quad x \in \mathbb{R},$$

definierar en kontinuerlig funktion.