

Tentamen i Envariabelanalys 2

2021-03-20 kl 8.00–13.00

Inga hjälpmedel. Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar.

Varje uppgift bedöms som godkänd eller underkänd. Godkända uppgifter ger sedan 2 eller 3 poäng medan underkända ger 0 eller 1 poäng. För betyg 3/4/5 räcker 3/4/5 godkända uppgifter och 8/12/16 poäng.

Svar finns tidigast på måndag 22/3 på kursens hemsida.

1. Låt D vara det begränsade område i xy -planet som avgränsas av kurvorna $y = x^2$ och $y = 2 - x^2$. Beräkna volymen av den kropp som uppstår då D roteras ett varv kring (a) linjen $x = 2$ (b) linjen $y = -1$.

2. Bestäm alla lösningar till

$$y^{(4)} - y = \sin 2x + e^x.$$

3. (a) Undersök $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2(e^{1/x^2} - \cos(1/x))$ (b) Undersök $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{1+x^3} - 1}{x - \arctan x}$
(c) Avgör om funktionen

$$f(x) = 3e^{x^2} - 3x \sin x - 2x^3 \ln(1+x)$$

har lokalt extremvärde i $x = 0$, och ange i så fall vilken typ.

4. Avgör konvergens: (a) $\int_0^\infty \frac{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}} dx$ (b) $\sum_{k=2}^\infty \frac{\sqrt{1+k^2}}{k^3 - 3k + 1}$ (2p+1p)

5. Bestäm Maclaurinutvecklingen av funktionen $f(x) = e^{-x} \sin x$ av ordning 3, med restterm i LAGRANGES form (ordning 4). Visa också att

$$\left| \frac{\sin(1/2)}{\sqrt{e}} - \frac{7}{24} \right| \leq \frac{1}{192}.$$

Även en korrekt genomförd, men något sämre, uppskattning kan ge poäng.

6. Visa att

$$y = \sum_{k=2}^\infty \frac{(-1)^k}{k(k-1)} x^{2k}$$

löser differentialekvationen $(1+x^2)y' - 2xy = 2x^3$ för $-1 < x < 1$. Uttryck sedan y med elementära funktioner genom att lösa ekvationen.

7. Är $\sum_{n=1}^\infty \int_{n\pi}^\infty \frac{\sin t}{t} dt$ konvergent?