

Tentamen i Envariabelanalys 2

2021-03-21 kl 14.00–19.00

Inga hjälpmedel. Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar.

Varje uppgift bedöms som godkänd eller underkänd. Godkända uppgifter ger sedan 2 eller 3 poäng medan underkända ger 0 eller 1 poäng. För betyg 3/4/5 räcker 3/4/5 godkända uppgifter och 8/12/16 poäng.

Svar finns tidigast på måndag 22/3 på kursens hemsida.

1. Beräkna volymen av den kropp som uppstår då området $0 \leq x \leq 2$, $-x^2 \leq y \leq x^2$ roteras ett varv runt

(a) $x = -1$, (b) $y = 4$.

(För full poäng krävs principskisser som motiverar formlerna som används.)

2. Bestäm den allmänna lösningen till $y''' - 2y'' - 4y' + 8y = 6e^x + 8$, samt bestäm de lösningar som uppfyller $y(0) = 0$.

3. Beräkna gränsvärdena:

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2) - \arctan(x^2)}{x^6}$, (b) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^3 (e^{\sqrt{1+1/x^3}} - e)$, (c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\cos(\pi x) - 1}{\ln(x-1) + 2 - x}$.

4. Lös $y(x) - \int_0^x 3t^2 y(t) dt = 2x^3 + 1$.

5. (a) Avgör för vilka $x \in \mathbb{R}$ som $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\sin(1/k^2)x^{2k}}{3^k}$ konvergerar. (2p)

(b) Avgör om $\int_1^{\infty} \sin(3/x) dx$ är konvergent. (1p)

6. Bestäm ett rationellt tal q sådant att $\left| \int_1^2 \sqrt[5]{1 + \sqrt{x-1}} dx - q \right| \leq \frac{1}{50}$.

7. Låt, för en given kontinuerligt deriverbar funktion $f(x)$ på $[0, 1]$ och $0 \leq s \leq 1$, $l_f(s)$ beteckna längden av grafen $y = f(x)$, $0 \leq x \leq s$. Avgör för vilka $r > 0$ som det finns ett f sådant att

$$l_f(s) = 2s^r \text{ för alla } s \in [0, 1],$$

samt bestäm för varje sådant r alla funktioner $f(x)$ som uppfyller detta.