Linköpings universitet
Matematiska institutionen

Utbildningskod: TATA42
Modul: TEN1

Tentamen i Envariabelanalys 2

2021-06-04 kl 14.00–19.00

Inga hjälpmedel. Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar.

Varje uppgift bedöms som godkänd eller underkänd. Godkända uppgifter ger sedan 2 eller 3 poäng medan underkända ger 0 eller 1 poäng. För betyg 3/4/5 räcker 3/4/5 godkända uppgifter och 8/12/16 poäng.

Svar finns tidigast 2021-06-07 på kursens hemsida.

1. Låt D vara det begränsade området mellan kurvorna

$$y = 5 - 2x^2 \quad \text{och} \quad y = 1 - x^2.$$

Beräkna volymen av den kropp som uppstår då D roteras ett varv kring $y = 6$. För full poäng krävs en principskiss som motiverar de avstånd och storheter som utnyttjas i beräkningen.

2. Bestäm samtliga lösningar till

$$y^{(4)} - 2y''' + 2y'' - 2y' + y = 2x + e^{2x}.$$

För full poäng ska svaret ges på reell form.

3. (a) Beräkna (1 p)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+3x) + \sqrt{1-6x} - \cos 2x}{x^2}.$$

(b) Beräkna (1 p)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x\left(\arctan\frac{1}{x} - \sin\frac{1}{x}\right)}{e^{1/x^2} - \cos\frac{2}{x}}$$

(c) Bestäm Maclaurinutvecklingen av ordning 3 till $f(x) = \cos(e^x - 1)$ med restterm i ordo-form (ordning 4). (1 p)

4. (a) Ange konvergensradien R till potensserien $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} x^n$. (1 p)

(Ändpunkterna skall alltså inte undersökas.)

(b) Är $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{\arctan x}}{x + x^2}\, dx$ konvergent eller divergent? (2 p)

VÄND!

5. Bestäm en lösning $y(x)$ till differentialekvationen

$$(1+x^2)^2 y' - 2x\,\mathrm{e}^y = 0, \quad y(0) = \ln 2,$$

och ange största möjliga öppna intervall där $y(x)$ är en lösning.

6. Bestäm ett rationellt tal r sådant att $\left|\arcsin \dfrac{1}{10} - r\right| < 10^{-6}$.

   Att $\left(\dfrac{100}{99}\right)^{5/2} < \dfrac{21}{20}$ får användas utan bevis.

7. Antag att $f(x)$ är positiv, kontinuerlig och avtagande för $x \geq 2$.

   (a) Visa att om $\displaystyle\int_2^{\infty} f(x)dx$ är konvergent så gäller att $\displaystyle\lim_{x\to\infty} xf(x) = 0$. (2 p)

   (b) Visa att även om $xf(x)$ avtar mot 0 så medför detta ***inte*** att $\displaystyle\int_2^{\infty} f(x)dx$ är konvergent. (1 p)