Linköpings universitet
Matematiska institutionen

Utbildningskod: TATA42
Modul: TEN1

Tentamen i Envariabelanalys 2

2021-06-04 kl 8.00–13.00

Inga hjälpmedel. Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar.

Varje uppgift bedöms som godkänd eller underkänd. Godkända uppgifter ger sedan 2 eller 3 poäng medan underkända ger 0 eller 1 poäng. För betyg 3/4/5 räcker 3/4/5 godkända uppgifter och 8/12/16 poäng.

Svar finns tidigast 2021-06-07 på kursens hemsida.

1. Bestäm alla lösningar till $xy' - 3y = x^5 e^x$, $x > 0$, sådana att $y(1) = 2$.

2. Ange som integraler, som *inte* ska beräknas:

   (a) Längden av kurvan $y = x^3$, $0 \le x \le 1$.

   (b) Arean av det område som i polära koordinater ges av $0 \le r \le e^{\varphi}$, $0 \le \varphi \le \pi$.

   (c) Volymen av den kropp som uppkommer då området $x^2 \le y \le x$ roteras ett varv kring y-axeln. För poäng krävs också en figur som förklarar formeln.

3. Härled Maclaurinutvecklingen av ordning 4 till funktionen $f(x) = \sin x$, med restterm i Lagranges form (ordning 5). Bestäm sedan ett bråktal p/q sådant att
$$\left|\sin(1/10) - p/q\right| \le 10^{-7}.$$

4. (a) Avgör för vilka $x \in \mathbb{R}$ som $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{2^k(k^2+1)}$ konvergerar. (2p)

   (b) Visa att $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + e^x} \le 2.$ (1p)

5. Bestäm en lösning till differentialekvationen $y' + 1 = x^2 y' + y^2$ vars graf går genom punkten $(x, y) = (2, 3)$. Ange också största möjliga öppna intervall där lösningen är definierad.

6. Bestäm alla värden på parametrarna A, B, C sådana att
$$f(x) = \ln(1 + \sin x) + A\cos x + B\arctan x + Cx^3$$
har lokalt maximum i $x = 0$.

7. Låt som vanligt $s_n = a_1 + \ldots + a_n$ vara delsummorna till serien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Bilda talföljden $\sigma_n = (s_1 + \ldots + s_n)/n$, som alltså är medelvärdena av delsummorna.

   (a) Antag att $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = s \in \mathbb{R}$. Visa att $\sigma_n \to s$ då $n \to \infty$.

   (b) Antag att $\sigma_n \to \sigma \in \mathbb{R}$ då $n \to \infty$. Är då $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent? Bevis eller motexempel!