Linköpings universitet
Matematiska institutionen

Utbildningskod: TATA42
Modul: TEN1

Tentamen i Envariabelanalys 2

2021-06-05 kl 14.00–19.00

Inga hjälpmedel. Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar.

Varje uppgift bedöms som godkänd eller underkänd. Godkända uppgifter ger sedan 2 eller 3 poäng medan underkända ger 0 eller 1 poäng. För betyg 3/4/5 räcker 3/4/5 godkända uppgifter och 8/12/16 poäng.

Svar finns tidigast 2021-06-07 på kursens hemsida.

1. (a) Ange en formel för längden till kurvan $y = x^2 + e^{3x}$, $2 \le x \le 4$ (längden ska inte beräknas). (1p)

   (b) Beräkna volymen till den kropp som uppstår då $0 \le y \le x + e^x$, $1 \le x \le 2$ roteras ett varv runt $x = -1$. (För full poäng krävs en principskiss som motiverar formeln.) (2p)

2. (a) Lös ekvationen $y^{(4)} + y'' = x^2$.
   För full poäng ska svaret ges på reell form. (2p)

   (b) Lös ekvationen $y' + 3x^2 y = 6x^2$. (1p)

3. (a) Beräkna $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^4}{\sin(x^2) + 2\cos x - 2}$. (b) Beräkna $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{1 - x + \ln x}{x^2 - 2x + 1}$.

   (c) Avgör om $f(x) = e^{\arctan(x^2)} - x^2$ har ett lokalt extremvärde i $x = 0$, och ange i så fall vilken typ.

4. (a) Avgör för vilka x som $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k+3)x^{2k}}{9^k}$ konvergerar. (2p)

   (b) Visa att $f(\sqrt{3}) \ge 5/2$ där $f(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k+3)x^{2k}}{9^k}$. (1p)

5. Bestäm Maclaurinutvecklingen till funktionen $f(x) = \sqrt{1+2x}$ av ordning 2, med restterm i Lagranges form (ordning 3). Visa också att
$$\left| f(-1/4) - \frac{23}{32} \right| \le \frac{1}{16}.$$

6. Avgör om $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx$ är konvergent.

7. Avgör för vilka positiva heltal m och n som det finns (minst) en deriverbar (reell) lösning $y(x)$ på $\mathbb{R}$ till $y^m y' = x^n$, $y(0) = 0$, samt ange för dessa m och n alla sådana lösningar. (OBS! Det ska tydligt framgå hur många lösningar vi har för varje par av m, n.)