

## Tentamen i Envariabelanalys 2

2021-06-05 kl 8.00–13.00

Inga hjälpmedel. Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar.

Varje uppgift bedöms som godkänd eller underkänd. Godkända uppgifter ger sedan 2 eller 3 poäng medan underkända ger 0 eller 1 poäng. För betyg 3/4/5 räcker 3/4/5 godkända uppgifter och 8/12/16 poäng.

Svar finns tidigast 2021-06-07 på kursens hemsida.

- Undersök  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(x^2) - \sin(x^2)}{x^6}$ .
  - Bestäm Taylorutvecklingen av ordning 2 för  $\sqrt{1+x}$  kring  $x = 3$  med restterm på ordo-form (med ordning 3).
  - Avgör om funktionen  $f(x) = \sqrt{1+x^2} \cos x$  har ett lokalt extremvärde i  $x = 0$  och ange i så fall vilken typ.
- Bestäm den allmänna lösningen till  $y''' + y'' + 3y' - 5y = 25x + 4e^{-x}$ .  
(För full poäng ska svaret ges på reell form.)
- Beräkna volymen av den kropp som uppstår då området givet av  $1 \leq y \leq e^x$ ,  $0 \leq x \leq 2$ , roterar ett varv kring linjen  $x = -1$ . (2p)
  - Ange som en integral, som inte ska räknas ut, arean för den yta som uppstår då kurvan  $y = e^x$ ,  $0 \leq x \leq 2$ , roterar ett varv kring linjen  $x = \pi$ . (1p)

(För full poäng krävs också figurer som förklarar de formler som används.)
- Är  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k+1} \exp\left(\frac{k+1}{k}\right)$  konvergent? (1p)
  - För vilka  $x \in \mathbb{R}$  konvergerar potensserien  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n \ln n}{n^3} x^{2n}$ ? (2p)
- Visa att  $1 \leq \int_0^{\infty} \frac{x + \sqrt{x}}{x + x^4} dx \leq 5$ . Korrekta uppskattningar med andra positiva rationella gränser än 1 och 5 ger 2 poäng.
- Bestäm en lösning till  $2y(x) + 6 = \int_0^x (1 - y(t)^2) dt$  och ange största möjliga öppna intervall där  $y(x)$  är en lösning.
- Låt  $a_k \geq 0$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$ , vara en avtagande talföljd. Visa att

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ är konvergent} \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k} \text{ är konvergent.}$$