Linköpings universitet
Matematiska institutionen

Utbildningskod: TATA42
Modul: TEN1

Tentamen i Envariabelanalys 2

2021-08-26 kl 14.00–19.00

Inga hjälpmedel. Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar.

Varje uppgift bedöms som godkänd eller underkänd. Godkända uppgifter ger sedan 2 eller 3 poäng medan underkända ger 0 eller 1 poäng. För betyg 3/4/5 räcker 3/4/5 godkända uppgifter och 8/12/16 poäng.

Svar finns tidigast 2021-08-27 på kursens hemsida.

1. (a) Ange en formel för arean av den yta som uppstår då kurvan $y = \ln x$, $1 \leq x \leq 3$, roteras ett varv runt linjen $x = 4$ (arean ska inte beräknas). (1p)

   (b) Beräkna volymen av den kropp som uppstår då området $x^4 \leq y \leq x^2$, $0 \leq x \leq 1$, roteras ett varv runt linjen $y = 2$. (2p)

   För full poäng krävs principskisser som motiverar formlerna.

2. Lös $y''' + y'' - 9y' - 9y = \mathrm{e}^{3x}$.

3. (a) Avgör för vilka $x \in \mathbb{R}$ som $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{3k}}{k\,8^k}$ konvergerar. (2p)

   (b) Visa att $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{x^2 + 7x}{x^5 + 3}\,dx \leq 4.$ (1p)

4. Bestäm Maclaurinutvecklingen till funktionen $f(x) = x^2 + \sin(x/3)$ av ordning 2, med restterm i Lagranges form (ordning 3). Visa också att

$$\left| f(-1) - \frac{2}{3} \right| \leq \frac{1}{100}.$$

5. Lös

$$y' = \frac{\cos x}{2y + 2}, \quad y(0) = \frac{-1 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}}.$$

   (För full poäng ska även det största öppna intervallet där $y(x)$ löser problemet anges.)

VÄND!

6. Låt $y = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ lösa

$$x^2 y'' - 2xy' + (4x^2 + 2)y = 0, \quad y'(0) = 1, \; y''(0) = -2.$$

Bestäm koefficienterna $c_0, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$ samt bestäm potensseriens konvergensradie R.

7. Man kan visa att

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2} = \frac{\pi a \coth(\pi a) - 1}{2a^2}, \qquad a > 0,$$

där funktionen coth kan skrivas $\coth(t) = (e^{2t} + 1)/(e^{2t} - 1)$.

(a) Visa att $\lim_{a \to 0+} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

(b) Använd resultatet i (a) och formeln ovan för att beräkna $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

(Du behöver inte ha löst (a) för att lösa (b).)