

Tentamen i Envariabelanalys 2

2021-10-20 kl 14.00–19.00

Inga hjälpmedel. Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar.

Varje uppgift bedöms som godkänd eller underkänd. Godkända uppgifter ger sedan 2 eller 3 poäng medan underkända ger 0 eller 1 poäng. För betyg 3/4/5 räcker 3/4/5 godkända uppgifter och 8/12/16 poäng.

Svar finns tidigast 2021-10-21 på kursens hemsida.

1. (a) Avgör om funktionen

$$f(x) = 2 \cos x + (\sin x) \cdot \ln(1 + x)$$

har lokalt extremvärde i $x = 0$. Ange också i så fall vilken typ.

- (b) Bestäm Taylorutvecklingen av ordning 2 för $g(x) = e^{-2x}$ kring $x = 1$ med restterm på ordoform (med restterm av ordning 3).

(c) Beräkna $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \arctan x) - x\sqrt{1-x}}{x^3}$.

2. Låt D vara det begränsade området mellan linjen $y = x$ och parabeln $y = x^2$, och låt V_1 och V_2 vara volymerna av de kroppar som uppstår då D roteras ett varv kring axeln $x = -1$ respektive $y = 1$. Beräkna V_1 och V_2 .

(För full poäng krävs principskisser som motiverar formlerna.)

3. Lös integralekvationen

$$y(x) + \int_{\pi}^x \frac{y(t)}{t} dt = \sin x, \quad x > 0.$$

4. (a) För vilka reella x är $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k x^{4k}}{4^k(k^3 + 1)}$ konvergent?

(b) Visa att $\int_0^1 \frac{1+x^2}{\sqrt{x}+x^5} dx \leq 4$.

5. Hitta ett rationellt tal p/q sådant att $\left| \int_0^{1/2} \frac{e^{-x^2} - 1}{x} dx - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{2000}$.

6. Lös differentialekvationen $x^2 y'' + 5xy' + 4y = \ln x$, $x > 0$.

7. Beräkna $\sum_{k=1}^{\infty} 3^k \sin^3(t/3^k)$ för $t \in \mathbb{R}$.