

## Tentamen i Envariabelanalys 2

2022-03-21 kl 8.00–13.00

Inga hjälpmedel. Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar.

Varje uppgift bedöms som godkänd eller underkänd. Godkända uppgifter ger sedan 2 eller 3 poäng medan underkända ger 0 eller 1 poäng. För betyg 3/4/5 räcker 3/4/5 godkända uppgifter och 8/12/16 poäng.

Svar finns tidigast kl 15.00 på kursens hemsida.

1. (a) Beräkna volymen av den kropp som uppstår då området

$$2 \leq y \leq x^2 + 3, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

roteras ett varv runt linjen  $x = 3$ . (2p)

- (b) Ange en formel för arean av den yta som uppstår då kurvan

$$y = x^2 - 4, \quad 2 \leq x \leq 3,$$

roteras ett varv runt linjen  $y = -2$ . (Arean ska inte beräknas.) (1p)

För full poäng krävs principskisser som motiverar formlerna.

2. (a) Beräkna  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^3) - x^3}{\sin(x^2) - x^2 + x^6}$  (b) Beräkna  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\arctan x} - 1 - x - x^2/2}{x^3}$   
(c) Avgör om  $f(x) = \cos x + \sqrt{1+x^2}$  har en lokal extrempunkt i  $x = 0$ , och ange i så fall vilken typ.

3. Bestäm alla lösningar till differentialekvationen

$$y''' + y'' + 3y' - 5y = e^{-x} + x - 5x^2.$$

För full poäng ska lösningarna anges i reell form.

4. (a) Bestäm konvergensradien  $R$  för potensserien  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{2^k \sqrt{k+1}}$ .  
(Beteendet i konvergensintervallets ändpunkter ska alltså inte undersökas.)

(b) Avgör konvergens:  $\int_1^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^2} dx$ .

(c) Visa att  $\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x} + x^2} \leq 3$ .

**VÄND!**

5. Bestäm en lösning till differentialekvationen

$$y' + e^x y^3 = 0$$

som uppfyller bivillkoret (a)  $y(0) = 1$  (b)  $y(0) = -1$ .

För full poäng ska också de största öppna intervall där  $y(x)$  löser problemet anges.

6. Bestäm ett rationellt tal  $q$  sådant att

$$\left| \int_0^{1/2} \cos(x^2) dx + \cos\left(\frac{1}{4}\right) - q \right| \leq \frac{1}{1000}.$$

7. Beräkna summan av serien

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

genom att utgå från Maclaurinserien för  $\arctan x$  för  $|x| < 1$ . Motivera noga!