Linköpings universitet
Matematiska institutionen

Utbildningskod: 9GMA04
Modul: STN1

Tentamen i Matematik: Envariabelanalys 2

2022-06-04 kl 8.00–13.00

Inga hjälpmedel. Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar.

Varje uppgift bedöms som godkänd eller underkänd. Godkända uppgifter ger sedan 2 eller 3 poäng medan underkända ger 0 eller 1 poäng. För betyg G/VG räcker 3/5 godkända uppgifter och 8/14 poäng.

Svar finns tidigast kl 15.00 på kursens hemsida.

1. (a) Det begränsade området mellan kurvorna (2 p)

$$y(x) = \sqrt{x},\ x \geq 0 \quad \text{och} \quad y(x) = x^2,\ x \geq 0$$

roteras ett varv kring linjen $y = -1$. Beräkna volymen av den då uppkomna rotationskroppen. För full poäng krävs en principskiss som motiverar formeln.

(b) Kurvan Γ definieras i polära koordinater av (1 p)

$$\Gamma\colon\ r = 2\sin\varphi, \quad \frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{2\pi}{3}.$$

Beräkna längden av Γ.

2. (a) Lös ekvationen (2 p)

$$y' - \frac{y}{x+1} = -(x+1)\sin x + (x^2+x)\cos x, \quad y(0) = 0.$$

(b) Avgör om lösningen i (a) har lokalt extremvärde då $x = 0$ och ange i så fall vilken typ. (1 p)

3. (a) Beräkna (1 p)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \mathrm{e}^{-x^2/4}}{x^4}$$

(b) Bestäm taylorutvecklingen av ordning 4 kring $x = \pi/2$ till $f(x) = \cos x$ med restterm i Lagranges form (av ordning 5). (2 p)

VÄND!

4. (a) Fyll i fortsättningen av texten nedan till en korrekt definition av konvergensbegreppet för en serie: (1 p)

   En serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ säges vara konvergent med summa S om ...

   (b) Visa att $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2+n}$ är konvergent och att $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2+n} \geq \frac{101}{210}$ (1 p)

   (c) Bestäm konvergensradien R till potensserien $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{4^k \ln k}{k^3} x^{2k}$ (1 p)

5. Lös ekvationen

$$y^{(4)} - 2y'' + y = x\mathrm{e}^x + \cos x.$$

6. Beräkna $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k(k+1)}$.

7. Visa att integralen

$$\int_{\pi}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

   inte är absolutkonvergent.