Linköpings universitet
Matematiska institutionen

Utbildningskod: TATA42
Modul: TEN1

Tentamen i Envariabelanalys 2

2022-08-25 kl 8.00–13.00

Inga hjälpmedel. Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar.

Varje uppgift bedöms som godkänd eller underkänd. Godkända uppgifter ger sedan 2 eller 3 poäng medan underkända ger 0 eller 1 poäng. För betyg 3/4/5 räcker 3/4/5 godkända uppgifter och 8/12/16 poäng.

Svar finns tidigast kl 15.00 på kursens hemsida.

1. (a) Kurvan (2 p)

$$y = \sqrt{1-x^2}, \quad 0 \le x < 1,$$

roteras ett varv kring linjen $y = -2$. Beräkna arean av den då uppkomna rotationsytan. För full poäng krävs en principskiss som motiverar formeln.

(b) Kurvan Γ definieras av (1 p)

$$\Gamma\colon \begin{cases} x &= t^2 \\ y &= \sin t \end{cases}, \qquad -1 \le t \le 1.$$

Ange en integral för längden av Γ. Integralen ska *inte* beräknas.

2. (a) Avgör konvergens: $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2+1}\,dx$. (b) Avgör konvergens: $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} k\sin\frac{1}{k}$.

(c) Visa att $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1+x}{\sqrt{x}+x^3}\,dx \le 6$.

3. Bestäm alla lösningar till differentialekvationen

$$y''' + 3y'' + 12y' + 10y = 26\,\mathrm{e}^x - 10x - 2$$

sådana att $y'(0) = 0$.

4. Bestäm Maclaurinutvecklingen av ordning 3 till funktionen

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} \quad (= \cosh x)$$

med restterm i Lagranges form (ordning 4). Bestäm sedan ett polynom $p(x)$ sådant att

$$\big|f(x) - p(x)\big| \le \frac{|x|^4}{12} \quad \text{då } |x| \le 1.$$

VÄND!

5. Bestäm en lösning $y(x)$ till integralekvationen

$$y(x) = \frac{1}{2} + \int_1^x \frac{\big(y(t)\big)^2}{t}\,dt.$$

För full poäng ska också största öppna intervall där $y(x)$ löser problemet anges.

6. Bestäm alla värden på parametrarna a och b sådana att gränsvärdet

$$\lim_{x\to\infty} x^2\big(\sqrt[3]{x^3+ax^2} - \sqrt{x^2+bx-1}\big)$$

existerar ändligt, och beräkna gränsvärdet för dessa värden.

7. Beräkna

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2+n}.$$